ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sulle congruenze di sfere di Ribaucour che ammettono una deformazione finita.* Nota del prof. L. P. Eisenhart (a Princeton), presentata dal Socio L. Bianchi [1].

Quando un sistema di sfere dipende da due parametri, il suo inviluppo consta, in generale, di due falde: S ed S_1, e i centri delle sfere giacciono sopra una superficie S_0. Fra le due superficie S, S_1 è stabilita una corrispondenza, facendo corrispondere i due punti di contatto di una medesima sfera (coll'inviluppo). Se le linee di curvatura si corrispondono sopra S, S_1, si dirà che queste due superficie sono nella relazione di una trasformazione di Ribaucour, o, più brevemente, in *relazione* R. In questo caso le curve di S_0 che corrispondono alle linee di curvatura di S, S_1, formano un sistema coniugato o *reticolo*, e la relativa equazione di Laplace ammette come soluzioni R e $x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$, dove x_0, y_0, z_0 indicano le coordinate del punto mobile su S_0, ed R denota il raggio della sfera. Inversamente, se l'equazione di Laplace relativa ad un reticolo N_0 (a cui soddisfano x_0, y_0, z_0) ammette la soluzione R ed insieme l'altra $x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$, le sfere coi centri sopra S_0 e di raggio R formano una congruenza di Ribaucour. Nelle notazioni di Guichard, il reticolo N_0 è 2, O ed R è la funzione complementare.

L'autore della presente Nota ha considerato il problema [2] di trovare le trasformazioni di Ribaucour tali che S_0 ammetta una superficie applicabile $\overline{S}_0$ in guisa che il sistema coniugato permanente su S_0, $\overline{S}_0$ sia un reticolo 2, O per ambedue, la funzione complementare R rimanendo la stessa nei due casi. Si è trovato che, in questo caso, S e S_1 hanno a comune la immagine sferica con due superficie isoterme S' e S'_1, nella relazione di una trasformazione D_m di Darboux; e, viceversa, ogni trasformazione D_m di una superficie isoterma S' porta ad una tale trasformazione di Ribaucour di una superficie S, avente a comune con S' l'immagine sferica delle linee di curvatura. Questo risultato è stato ottenuto anche da Calapso [3]. Mi propongo nella presente Nota di stabilire delle trasformazioni di reticoli applicabili 2, O in reticoli della stessa specie.

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 luglio 1920.
(2) Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 17 (1916), pp. 437-458.
(3) Annali di matematica, serie 3ª, vol. 26 (1917), pp. 151-190. Ved. anche Bianchi, Memorie della R. Accad. dei Lincei, 1918, § 53 (serie 5ª, vol. X).

Se $N(x)$ è un reticolo coniugato, e la relativa equazione di Laplace (per coordinate di punto) si scrive

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

ogni coppia di soluzioni h, l del sistema

$$(2)\qquad \frac{\partial h}{\partial v} = (l - h)\frac{\partial \log a}{\partial v}, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = (h - l)\frac{\partial \log b}{\partial u}$$

è tale che risultano compatibili le equazioni

$$(3)\qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = h\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = l\frac{\partial x}{\partial v},$$

e le analoghe in y, z, e le x', y', z' sono le coordinate di un reticolo N' parallelo ad N. Se θ è una soluzione di (1), e θ' la *corrispondente* soluzione dell'equazione di Laplace per N', definita da

$$(4)\qquad \frac{\partial \theta'}{\partial u} = h\frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial v} = l\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

allora le funzioni x_1, y_1, z_1 definite dalle formole

$$(5)\qquad x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'}x', \text{ ecc.}$$

sono le coordinate di un reticolo N_1, tale che le sviluppabili della congruenza C_1 delle rette congiungenti i punti corrispondenti di N, N_1 tagliano le superficie S, S_1 sulle quali giacciono N, N_1 appunto in questi reticoli. Diciamo allora che N_1 è un reticolo *trasformato per una* T di N [1].

Se N ammette un reticolo applicabile $\overline{N}(\overline{x})$, il reticolo $\overline{N}'(\overline{x}')$ le cui coordinate sono date da

$$(6)\qquad \frac{\partial \overline{x}'}{\partial u} = h\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \overline{x}'}{\partial v} = l\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}$$

è parallelo ad $\overline{N}$ ed applicabile sopra N' in ordine al teorema di Peterson. Secondo il teorema di König, l'equazione di Laplace, comune a $\overline{N}'$ e N', ammette la soluzione

$$(7)\qquad \theta' = \Sigma x'^2 - \Sigma \overline{x}'^2.$$

Questa soluzione θ' e la corrispondente soluzione θ dell'equazione comune a N e $\overline{N}$, data dalle (4), sono tali che il reticolo $\overline{N}_1(\overline{x}_1)$, le cui coor-

[1] Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), pag. 109.

dinate $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1$ sono date da

$$(8) \qquad \bar{x}_1 = \bar{x} - \frac{\theta}{\theta'}\bar{x}', \text{ ecc.}$$

è trasformato per una T di $\overline{\mathrm{N}}$ ed è applicabile sopra N_1 (¹).

Si può dimostrare che se N è un reticolo 2, O, la funzione complementare essendo R, ogni reticolo parallelo è anche 2, O e la funzione complementare R' è data per quadrature della forma (4). In particolare due di questi reticoli paralleli N' sono tali che si ha

$$(9) \qquad \Sigma x'^2 - \mathrm{R}'^2 = 0;$$

questi chiamiamo *reticoli speciali* 2, O. Il teorema seguente può stabilirsi senza difficoltà:

Se N *è un reticolo* 2, O, *ed* N' *un reticolo parallelo non speciale, risulta determinato con una quadratura un reticolo* N_1 *che è* 2, O, *e trasformato per una* T *di* N; *se* N' *è speciale, qualunque soluzione dell'equazione di Laplace per* N *determina un reticolo* 2, O *trasformato per una* T.

Nel primo caso si ha

$$(10) \qquad \theta' = \tfrac{1}{2}(\Sigma x'^2 - \mathrm{R}'^2).$$

Ritorniamo alla considerazione di reticoli applicabili 2, O. Se S' e S'_1 sono superficie isoterme in relazione D_m, il reticolo centrale N'_0 ammette un reticolo applicabile speciale $\overline{\mathrm{N}}'_0$, pel quale

$$(11) \qquad \Sigma \bar{x}_0'^2 - \mathrm{R}'^2 = 0.$$

Consideriamo un reticolo N_0 parallelo ad N'_0, ed effettuiamo la trasformazione T di N_0 per mezzo di $\theta' = \frac{1}{2}(\Sigma x_0'^2 - \mathrm{R}'^2)$, e sia $\mathrm{N}_{0,1}$ il reticolo 2, O così ottenuto. A causa della (11) abbiamo

$$\theta' = \tfrac{1}{2}(\Sigma x_0'^2 - \Sigma \bar{x}_0'^2).$$

Quindi, se applichiamo questa trasformazione a $\overline{\mathrm{N}}_0$, applicabile su N_0 otteniamo un reticolo $\overline{\mathrm{N}}_{0,1}$, applicabile su $\mathrm{N}_{0,1}$ e, pel precedente teorema, ambedue questi reticoli sono 2, O. Per trovare questa trasformazione è necessario calcolare la corrispondente funzione θ colla quadratura (4). Dunque:

Se è noto un reticolo 2, O *che ammette un reticolo applicabile, si può trovare con una quadratura un'altra coppia di reticoli di questa specie.*

È evidente che questo procedimento può ripetersi.

(¹) Transactions of Amer. Math. Soc., vol. 19 (1918), pp. 167-185.