ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Sella d'altra parte ritiene che, perchè si abbia miglioramento, il rapporto tra gli anofeli che pungono la popolazione e quelli presenti (egli valuta, ciò che non ha fatto Ross, anche l'influenza degli animali domestici sul regime malarico), deve decrescere in ragione minore della radice quadrata del rapporto che misura l'aumento del totale anofelico.

Tutti questi calcoli dovrebbero subire grandi modificazioni se si tenesse conto, come si dovrebbe, sià della durata della vita degli anofeli, che, nei mesi più caldi, in un grandissimo numero di casi, è insufficiente per la maturazione dei parassiti malarici e che può essere molto modificata da variazioni atmosferiche ecc., sia dell'istinto degli anofeli di tornare nei luoghi dove hanno punto una prima volta.

Evidentemente si può fare una simile critica al Gorgas (citato da Piras), il quale è venuto alla conclusione che, qualora le stegomie si riducano a 10 per metro quadrato, vi è la probabilità che, se esistono malati di febbre gialla, essi non siano punti e quindi non vi siano più stegomie infette, e avvenga la cessazione brusca dell'epidemia.

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie. II: Teorema di Bruno. Covarianti conici.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

5. Nella precedente Nota abbiamo provato, per via geometrica, che ogni covariante Φ d'una forma binaria f d'ordine n, è individuato dal suo termine principale φ. Vediamo ora come dall'espressione di φ possa dedursi formalmente quella di Φ.

Poichè Φ è il primo membro dell'equazione di Δ_P nei cui coefficienti si lascino in evidenza le x_1, x_2 (o la x se si tratta di $\overline{\Phi}$), così se si trasforma $\varphi = 0$ mediante una qualunque fra le proiettività τ di Γ che mutano U nel generico punto P di C^n (corrispondente al punto $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ di r), il primo membro dell'equazione trasformata (nelle variabili ξ_1, ξ_2) deve, a meno d'un fattore che si riconosce facilmente essere una potenza di ξ_2, identificarsi col covariante Φ. Anzi, se nelle forme lineari che debbono sostituirsi alle a_i per effettuare su φ la trasformazione indicata (cioè nei secondi membri della sostituzione che rappresenta τ^{-1}) si mette in evidenza la $x = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$, si ottiene senz'altro la $\overline{\Phi}$ a meno d'un fattore costante, che può ridursi eguale ad 1, scegliendo opportunamente il fattore di proporzionalità della trasformazione.

Per ottenere lo scopo, basta, ad esempio, partirsi dalla sostituzione

$$x'_1 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \quad , \quad x'_2 = \xi_2 x_1 , \tag{6}$$

e operare con essa sulla f; i coefficienti della f' trasformata, che, a meno d'un comune fattore posson ridursi alle espressioni

$$(7) \qquad \frac{(n-i)!}{n!} \frac{d^i \overline{f}(x)}{dx^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

dànno allora le forme lineari cercate, conducendo così al teorema di Bruno [1]: *L'espressione d'un covariante* $\overline{\Phi}$ (nella variabile non omogenea x) *si deduce da quella del suo termine principale* φ *sostituendo in questa al posto delle* a_i *le forme lineari* (7).

La portata notevole di questo teorema nello studio delle relazioni tra forme invariantive, verrà messa in luce in una successiva Nota.

6. Diremo *rango* d'un covariante (od invariante) Φ il numero delle intersezioni variabili di Δ_P con una retta generica uscente da P, cioè il grado del relativo termine principale φ rispetto al coefficiente a_n di f.

È ovvio che se r è il rango di Φ, il punto P è $(n-r)$-plo per Δ_P; sicchè, se $r = 0$, Δ_P sarà un cono. Diremo in tal caso che Φ è un *covariante conico*. Il covariante conico più semplice è evidentemente la forma stessa, e i coni relativi sono gl'iperpiani osculatori a C^n.

Se Φ è un covariante conico, e si proietta la C^n da P su di un S_{n-1}, le generatrici del cono Δ_P segano ivi una ipersuperficie che indicheremo con $\Delta'_{P'}$, P' essendo la proiezione di P sulla C^{n-1} proiezione di C^n; ed è facile vedere che $\Delta'_{P'}$ è invariante per le proiettività di C^{n-1} in sè che lascian fisso P'. Invero queste si ottengono per sezione, dal gruppo ∞^2 subordinato entro la stella di centro P dalle proiettività di Γ che lascian fisso P.

Sicchè $\Delta'_{P'}$ individuerà un covariante (od invariante) Φ' per le forme d'ordine $n-1$; e viceversa, dato un tal covariante, se ne deduce un covariante conico Φ delle forme d'ordine n, invertendo l'operazione predetta.

Il covariante Φ si dirà *proiezione* di Φ'; se l, m sono rispettivamente il grado e l'ordine di Φ', una semplice analisi numerativa prova che i caratteri analoghi di Φ sono $l, l+m$.

Se anche Φ' e le sue successive proiezioni $\Phi'', \Phi''', \ldots, \Phi^{(h-1)}$ sono covarianti conici, ma non lo è $\Phi^{(h)}$ $(h \leq n)$, il covariante Φ si dirà *h-conico*; le Δ_P relative son coni aventi per vertice lo S_{h-1} osculatore a C^n in P.

Così ad esempio proiettando dagli S_{n-2i+1} osculatori a C^n le quadriche di Clifford (invarianti quadratici) delle C^{2i} proiezioni $(2i \leq n-1)$, si hanno *tutti i covarianti quadratici* della forma f. In particolare, se $i = 1$, si

(1) Faà di Bruno, *Sur un théorème général dans la théorie des covariants* [C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, XC (1880), pp. 1203-1205]. Per citazioni più dettagliate vedi il rapporto di F. Meyer, *Sullo stato presente della teoria degl'invarianti* (trad. italiana di G. Vivanti) [Giornale di Mat., 1893-98], vol. XXXIV (1896), pag. 339.

ha l'*hessiano* i cui coni si ottengono proiettando dagli S_{n-3} osculatori le coniche proiezioni di C^n, cioè la C^n stessa.

L'interpretazione formale dell'operazione di proiezione consiste in ciò: se $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ è il termine principale d'un covariante Φ' delle forme d'ordine $n-1$, la stessa φ è anche il termine principale del covariante Φ che se ne deduce per proiezione. In particolare, per qualunque n, il termine principale dell'hessiano è il 1° membro dell'equazione di C^2, cioè $a_0 a_2 - a_1^2$.

Nella notazione simbolica di Clebsch il simbolo di Φ si ottiene da quello di Φ' moltiplicando questo simbolicamente per $a_x, b_x, c_x, \ldots$, essendo $a, b, c, \ldots$, *tutte* le lettere contenute nel simbolo di partenza (1).

Matematica. — *I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari*. Nota I del dott. E. Del Vecchio, presentata dal Corrisp. Guido Fubini.

Ci proponiamo di dare sommariamente, in due Note, i teoremi di unicità per un'equazione differenziale del 3° ordine, lineare, a caratteristiche triple, cioè riducibile al tipo:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + e\frac{\partial z}{\partial y} + fz + g = 0\,;$$

$a, b, c \ldots$ sono funzioni di x e y; nei casi in cui delle derivate in y vi si contenga o la sola $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ o la sola $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ o la sola $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, i quali appunto presentano caratteri diversi tra loro (2). Ci limitiamo per ora ai due ultimi casi, perchè forse il primo è, in certo senso, riducibile all'equazione del calore (3).

Teoremi di unicità per:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + e\frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + fz + g = 0\,.$$

(1) Cfr. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* [Leipzig, Teubner 1872] Cap. VI, pag. 254.

(2) Nell'Arkiv för Matematik.... le Note del Block: *Sur les équations linéaires aux derivées partielles à caractéristiques multiples* (2e Note, 1911, Band 7, n. 21, pag. 19....; 3e Note, 1912, Band 8, n. 23, pag. 18....) e la Nota dell'a.: *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques*: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 1916, Band 11, n. 11.

(3) Block, Note 3e cit., pag. 39.