ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

ha l'*hessiano* i cui coni si ottengono proiettando dagli S_{n-3} osculatori le coniche proiezioni di C^n, cioè la C^n stessa.

L'interpretazione formale dell'operazione di proiezione consiste in ciò: se $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ è il termine principale d'un covariante Φ' delle forme d'ordine $n-1$, la stessa φ è anche il termine principale del covariante Φ che se ne deduce per proiezione. In particolare, per qualunque n, il termine principale dell'hessiano è il 1° membro dell'equazione di C^2, cioè $a_0 a_2 - a_1^2$.

Nella notazione simbolica di Clebsch il simbolo di Φ si ottiene da quello di Φ' moltiplicando questo simbolicamente per $a_x, b_x, c_x, \dots$, essendo $a, b, c, \dots$, *tutte* le lettere contenute nel simbolo di partenza (¹).

Matematica. — *I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari*. Nota I del dott. E. Del Vecchio, presentata dal Corrisp. Guido Fubini.

Ci proponiamo di dare sommariamente, in due Note, i teoremi di unicità per un'equazione differenziale del 3° ordine, lineare, a caratteristiche triple, cioè riducibile al tipo:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + e\frac{\partial z}{\partial y} + fz + g = 0\,;$$

$a, b, c \dots$ sono funzioni di x e y; nei casi in cui delle derivate in y vi si contenga o la sola $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ o la sola $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ o la sola $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, i quali appunto presentano caratteri diversi tra loro (²). Ci limitiamo per ora ai due ultimi casi, perchè forse il primo è, in certo senso, riducibile all'equazione del calore (³).

Teoremi di unicità per:

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + e\frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + fz + g = 0\,.$$

(¹) Cfr. Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen* [Leipzig, Teubner 1872] Cap. VI, pag. 254.

(²) Nell'Arkiv för Matematik.... le Note del Block: *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples* (2ᵉ Note, 1911, Band 7, n. 21, pag. 19....; 3ᵉ Note, 1912, Band 8, n. 23, pag. 18....) e la Nota dell'a.: *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques*: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 1916, Band 11, n. 11.

(³) Block, Note 3ᵉ cit., pag. 39.

Ponendo: $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(y)$, la (I) si trasforma in un'equazione dello stesso tipo ([1]):

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} + p\frac{\partial z}{\partial \eta} + q\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + r\frac{\partial z}{\partial \xi} + sz + t = 0\,,$$

ove:

$$p = \frac{e\dfrac{d\eta}{dy}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\;;\; q = \frac{3\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + a\dfrac{d\xi}{dx}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^2}\;;\; r = \frac{\dfrac{d^3\xi}{dx^3} + a\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + d\dfrac{d\xi}{dx}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\;;$$

$$s = \frac{f}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\;;\; t = \frac{g}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\;;$$

Noi consideriamo un campo C, *il cui contorno* c, *tutto al finito, abbia generalmente tangente; sia incontrato in un numero finito di punti dalle parallele agli assi* x *ed* y; *sia percorso in un determinato verso (verso* $+$ *delle tangenti). Il verso* $+$ *delle normali sia quello che coinciderebbe con* $+y$, *se le corrispondenti tangenti* $+$ *coincidessero con* $+x$. *Il campo trasformato* C' *sia dello stesso tipo.* Allora, se $z(\xi, \eta)$ è tale che:

h) $z, \dfrac{\partial z}{\partial \xi}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ *sono finite e continue in* C';

k) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}, \dfrac{\partial z}{\partial \eta}$ *sono integrabili in* C'; *e di più si ha:*

$$\int \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} d\xi = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \varphi(\eta)\;;\; \int \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = z + \chi(\xi)$$

([1]) Nel modo più generale: (1) $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(y)$, con: (2) $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \neq 0, \dfrac{d\eta}{dy} \neq 0$, muta la (I) in un'equazione dello stesso tipo. Poniamo: $\xi = \xi(x)$ per semplificare. Se la (1) rendesse uguali od opposti i coefficienti di $\dfrac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$ nella equazione trasformata, e vi annullasse il termine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, il teorema di unicità si ricaverebbe facilmente ponendo: $z(\xi, \eta) = e_l^{h\eta}\, Z(\xi, \eta)$, ove e_l è la base dei logaritmi naturali, e h una costante da fissarsi convenientemente. Però dall'esame dei coefficienti dell'equazione trasformata e della (2) risulta che la prima semplificazione è possibile solo quando il coefficiente $e(x, y)$ è a segno costante in C ed inoltre è, per esempio, integrabile in x. L'altra semplificazione non è in generale possibile quando lo è la 1ª, ma da sola è sempre fattibile, purchè il coefficiente $a(x, y)$ soddisfi a condizioni di integrabilità. Non faremo però tale riduzione, che parrebbe semplificativa, perchè essa richiederebbe ξ funzione di x e y, complicando così il nostro procedimento.

con l'integrazioni per parti si ricava:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\iint_{C'} z\frac{\partial^3 z}{\partial\xi^3}d\xi\, d\eta = \int_{c'}\left[z\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2\right]d\eta\,; \\ &\iint_{C'} pz\frac{\partial z}{\partial\eta}d\xi\, d\eta = -\frac{1}{2}\int_{c'} pz^2\, d\xi - \frac{1}{2}\iint_{C'}\frac{\partial p}{\partial\eta}z^2\, d\xi\, d\eta\,; \ldots \end{aligned}$$

e analoghe relazioni per $\iint_{C'} qz\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}d\xi\, d\eta$, $\iint_{C'} rz\frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi\, d\eta$, quando p, q, r rispondono a talune condizioni, certo soddisfatte per le ipotesi che faremo sui coefficienti di (I). Ciò posto, supponiamo che: **a**) *i contorni c e c' di* C *e* C' *abbiano un punto di ordinata massima e uno di ordinata minima, dai quali sieno divisi in due archi* s_0, s_1; s'_0, s'_1: *su* s_0, s'_0 *sia* dy *o* $d\eta$ *negativo*; *su* s_1, s'_1 dy *o* $d\eta$ *positivo, percorrendo c e c' nel verso prefissato*; e consideriamo *due soluzioni* z_1, z_2 *della* (I_1) *in* C', *che assumono su* c' *gli stessi valori dati ad arbitrio, e tali che le loro* $\frac{\partial}{\partial\xi}$ *assumono su* s'_0 *o* s'_1 *gli stessi valori dati ad arbitrio.*

Supponiamo che i valori per le $\frac{\partial}{\partial\xi}$ sieno dati su s'_0; l'altro caso si riduce a questo facilmente.

La funzione $v = z_1 - z_2$ è in C' soluzione della (I_1) senza termine noto; si annulla su c' e ha nulla su s'_0 la $\frac{\partial}{\partial\xi}$. Per tale comportamento dalle (3) ricaviamo:

$$(4)\quad \iint_{C'} v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial\xi^3} + p\frac{\partial v}{\partial\eta} + q\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + r\frac{\partial v}{\partial\xi} + sv\right)d\xi\, d\eta = -\frac{1}{2}\int_{s'_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 d\eta - \\ - \iint_{C'} q\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 d\xi\, d\eta + \frac{1}{2}\iint_{C'}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial\xi^2} - \frac{\partial r}{\partial\xi} - \frac{\partial p}{\partial\eta} + s\right)v^2\, d\xi\, d\eta = 0\,.$$

Il 1° termine a 2° membro della (4) *è non positivo. Il 2° termine sarà tale se*: in C, $q > 0$; cioè se: in C, $3\frac{d^2\xi}{\partial x^2} + a\frac{d\xi}{dx} > 0$. Questo si verifica quando ξ è soluzione di: $3\frac{d^2\xi}{dx^2} + m\frac{d\xi}{dx} = \mathrm{F}(x)$, ove m è il minimo in C di $a(x, y)$, supposta finita e continua, e $\mathrm{F}(x)$ è una funzione positiva in C, integrabile ...: (α) $\xi = \int\left\{e_l^{-\frac{mx}{3}}\left[\frac{1}{3}\int \mathrm{F}(x)\, e_l^{\frac{mx}{3}}dx + \mathrm{H}\right]\right\}dx + \mathrm{K}$ [1];

e quando inoltre è: $\frac{d\xi}{dx} > 0$, il che si soddisfa prendendo positiva la costante H e per limite inferiore dell' $\int$ tra [ ] la minima x dei punti di C.

[1] e_l è la base dei logaritmi naturali.

Nel 3° integrando a 2° membro di (4) i primi due termini e l'ultimo tra ( ) sono funzioni note di x e y, come risulta dal calcolo delle loro espressioni. Pertanto *l'integrando, e quindi l'integrale relativo, è non positivo*, se in C è: $\psi(x,y)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[e\frac{d\eta}{dy}\right]<0$, ove ψ è nota; cioè se:

$$e\frac{d^2\eta}{dy^2}+\left[\frac{\partial e}{\partial y}-\psi\right]\frac{d\eta}{dy}>0\,,\quad \text{supponendo}\quad \frac{d\eta}{dy}>0\,. \tag{5}$$

Il procedimento seguìto è legittimo se $e(x,y)$, $a(x,y)$, $d(x,y)$, $f(x,y)$ *sono finite e continue in* C *insieme con*: $\frac{\partial e}{\partial y}$; $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$; $\frac{\partial d}{\partial x}$. *Supponiamo inoltre che la* $e(x,y)$ *sia a segno costante in* C. $\psi(x,y)$ risulta finita in C.

Se $e(x,y)$ *è positiva in* C, ne consegue: $e(x,y)\geq m^2>0$. Siccome poi: in C, $\frac{\partial e}{\partial y}-\psi>-M^2$, abbiamo che η soddisfa alla (5), se risolve: $m^2\frac{d^2\eta}{dy^2}-M^2\frac{d\eta}{dy}=N^2$, e ha positivi $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d^2\eta}{dy^2}$. Ciò si verifica facendo:

(β) $\eta=-\frac{N^2}{M^2}y+\frac{H_1 m^2}{M^2}e_l^{\frac{M^2}{m^2}y}+K_1$ e prendendo la costante $H_1>0$ e abbastanza grande.

Analogamente se $e(x,y)$ *è negativa in* C si può soddisfare la (5), rendendo così ≤ 0 il 3° integrando a 2° membro di (4).

Adunque *possiamo avere rispettivamente non negativo, non negativo, non positivo i tre integrandi a 2° membro di* (4); *e i due ultimi tali in tutto* C'. Allora i tre integrali rispettivi dovranno annullarsi separatamente; siccome poi il 3° integrando è continuo in C', dovrà essere: *in* C', $v=0$, *cioè*: $z_1=z_2$; e quindi *in* C *coincideranno le corrispondenti soluzioni della* (I).

Osserviamo che, siccome le funzioni (α), (β) sono a derivata di segno costante, se C e c sono del tipo indicato, tali saranno C' e c'; e per la natura di (α) e (β) i coefficienti e le soluzioni di (I_1) godranno le proprietà di continuità.... dei corrispondenti coefficienti e soluzioni di (I). Possiamo pertanto enunciare il seguente *teorema di unicità*:

Se il campo C *è limitato da una curva* c, *che si trovi tutta al finito, abbia generalmente tangente, sia incontrata in un numero finito di punti dalle parallele agli assi* x *e* y, *e soddisfi alla condizione* **a**), *non possono esistere in esso due distinte soluzioni dell'equazione* (I), *le quali soddisfino alle condizioni* h), k), *assumano sul contorno* c *gli stessi valori arbitrariamente assegnati, e sieno tali che le loro derivate prime in* x *assumano su* s_0 *o* s_1 *gli stessi valori pure arbitrariamente assegnati, se i coefficienti della* (I), $e(x,y)$, $a(x,y)$, $d(x,y)$, $f(x,y)$ *sono finite e continue in* C *insieme con le derivate rispettive*: $\frac{\partial e}{\partial y}$; $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$; $\frac{\partial d}{\partial x}$; *e di più* $e(x,y)$ *è a segno costante in* C.