ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Analisi matematica. — *Les rapports des ensembles parfaits présentant le caractère* (A) *et des fonctions admettant une dérivée seconde généralisée.* Nota di ARNAUD DENJOY, presentata dal Socio VITO VOLTERRA.

Je renvoie à mes précédentes Notes [1] pour la définition et l'étude du caractère (A).

Soit $F(\theta)$ une fonction continue. Posons, u étant un nombre non nul,

$$\frac{F(\theta+u)-F(\theta)}{u}=Q(\theta\,,u)=Q(\theta+u\,,-u)\,,$$

$$\frac{F(\theta+u)+F(\theta-u)-2F(\theta)}{u^2}=\frac{Q(\theta\,,u)-Q(\theta\,,-u)}{u}=R(\theta\,,u)\,.$$

On dit que F admet au point θ une *dérivée seconde généralisée* égale à $f(\theta)$, si $R(\theta\,,u)$ tend vers $f(\theta)$ quand u tend vers 0, θ étant indépendant de u. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant.

VI. *Si l'ensemble parfait* P *présente le caractère* (A), *et si, quels que soient* θ *sur* P *et* $|u|$ *positif et borné indépendamment de* θ, $|R(\theta\,,u)|$ *demeure borné*:

1°) $F(\theta)$ *possède une dérivée* $\Phi(\theta)$ *en tout point* θ *de* P;

2°) $\Phi(\theta)$ *est continue sur* P *et les nombres dérivés de* $\Phi(\theta)$ *spéciaux à* P *sont bornés*;

3°) *Si, en outre,* $F(\theta)$ *admet la dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$, $\Phi(\theta)$ *admet* $f(\theta)$ *pour dérivée spéciale à* P, *tout au moins en un ensemble de valeurs de* θ *partout dense sur* P.

Supposons $|R(\theta\,,u)|<\sigma$, quels que soient: 1°) θ sur P; 2°) $|u|$ positif et par exemple inférieur à 2.

Soient quatre nombres $x_1\,,x'_1\,;x\,,x'$ vérifiant la relation $x'-x=2(x'_1-x_1)>0$. On a $2x'_1-x'=2x_1-x=\xi$. Le point ξ est simultanément le symétrique de x par rapport à x_1 et celui de x' par rapport à x'_1. *Supposons que* x_1 *et* x'_1 *soient sur* P. Désignons par $2k$ la distance (positive) de x_1 et de x'_1, et par l les différences égales $\omega_1-\xi$ et $\omega-\omega_1$, si ω et ω_1 sont les milieux respectifs des intervalles $(x\,,x')$ et $(x_1\,,x'_1)$. On a

$$x_1=\xi+l-k\quad,\quad x'_1=\xi+l+k\,,$$
$$x=\xi+2l-2k\quad,\quad x'=\xi+2l+2k\,.$$

[1] V. questi Rendiconti, pagine 291 e 316.

Nous supposons que $|l|+k$, égal au plus grand des deux nombres $|x-x_1|$ et $|x'-x'_1|$, est inférieur à 2.

x_1 et x'_1 étant sur P, on a $|R(x_1, u)| < \sigma$, $|R(x'_1, u)| < \sigma$, si $0 < |u| < 2$. Nous faisons dans la première relation $u = x - x_1 = l - k$, et dans la seconde $u = x' - x'_1 = l + k$. Il vient, en désignant par la lettre δ diversement affectée d'accents et d'indices, des nombres dont les carrés sont inférieurs à 1,

$$F(x) + F(\xi) - 2F(x_1) = \delta_1 \sigma (l-k)^2$$

et

$$F(x') + F(\xi) - 2F(x'_1) = \delta'_1 \sigma (l+k)^2 .$$

D'où
$$2F(x'_1) - 2F(x_1) = F(x') - F(x) + 2\delta\sigma(l^2 + k^2) ,$$

et en divisant tout par $x' - x = 4k$,

$$\frac{F(x'_1) - F(x_1)}{x'_1 - x_1} = \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} + \delta\sigma \frac{l^2 + k^2}{2k} . \tag{1}$$

Telle est la formule que nous allons utiliser.

Soit θ un point quelconque de P. Sur le segment $\theta - \frac{1}{2^n}$ à $\theta + \frac{1}{2^n}$, nous pouvons trouver (théorème V) deux points θ_n et θ'_n de P, tels que $\theta'_n = \theta_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Appliquons la formule (1), en y faisant jouer les rôles de x et de x' respectivement à θ_{n-1} et θ'_{n-1}, ceux de x_1 et de x'_1 à θ_n et θ'_n. k, demi-distance de x_1 et de x'_1, vaut $\frac{1}{2^{n+2}}$; $|l|$, distance du milieu de $(\theta_{n-1}, \theta'_{n-1})$ au milieu de (θ_n, θ'_n) est au plus égal à $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{9}{2^{n+2}}$. D'où $\frac{l^2+k^2}{2k} < \frac{41}{2^{n+2}}$. Enfin, soit $\frac{F(\theta'_n) - F(\theta_n)}{\theta'_n - \theta_n} = Q\left(\theta_n , \frac{1}{2^{n+1}}\right) = C_n$. On a

$$C_n = C_{n-1} + 41 \frac{\delta_n \sigma}{2^{n+2}} . \tag{2}$$

En ajoutant membre à membre les n premières relations (2), il vient

$$C_n = C_0 + 41\,\sigma \sum_1^n \frac{\delta_n}{2^{n+2}} .$$

Ceci montre que C_n tend vers une limite $\Phi(\theta)$ quand n croît.

On a dès l rs, en ajoutant membre à membre les relations (2) pour $n+1, n+2, \ldots n+p$, et faisant croître p:

$$C_n = \Phi(\theta) + 41 \frac{\delta^{(n)} \sigma}{2^{n+2}} . \tag{3}$$

Soit maintenant h un nombre quelconque non nul, inférieur à 1 en valeur absolue. On a :

$$h = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots,$$

les a non nuls étant tous de même signe et égaux à 1 en valeur absolue. Posons

$$h_1 = h, \ldots, h_n = \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots. \text{ On a } |h_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Calculons $\qquad F(\theta + h_{n+1}) - F(\theta + h_n)$.

Si $a_n = 0$, cette différence est nulle.

Si $|a_n| = 1$, on peut, d'après $|h_n - h_{n+1}| = \frac{1}{2^n} = 2(\theta'_n - \theta_n)$, appliquer la formule (1). x_1 et x'_1 sont remplacés respectivement par θ_n et par θ'_n, x et x' par $\theta + h_{n+1}$ et $\theta + h_n$ (ou l'inverse selon que h est positif ou négatif). On a $k = \frac{1}{2}(\theta'_n - \theta_n) = \frac{1}{2^{n+2}}$. $|l|$ est la distance du milieu de (θ_n, θ'_n) au milieu de $(\theta + h_n, \theta + h_{n+1})$ intervalle égal en longueur à $\frac{1}{2^n}$ et dont l'extrémité $\theta + h_{n+1}$ est distante de θ de $\frac{1}{2^n}$ au plus. Donc cette fois encore $|l|$ est au plus égal à $\frac{9}{2^{n+2}}$ et $\frac{l^2 + k^2}{2k} \leq \frac{41}{2^{n+2}}$. Donc,

$$\frac{F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1})}{h_n - h_{n+1}} = \frac{F(\theta'_n) - F(\theta_n)}{\theta'_n - \theta_n} + \delta''\sigma \frac{41}{2^{n+2}} = \Phi(\theta) + 41 \frac{\delta_1^{(n)}\sigma}{2^{n+1}}$$

et dans tous les cas ($a_n = 0$ ou $a_n = \pm 1$)

$$F(\theta + h_n) - F(\theta + h_{n+1}) = \frac{a_n}{2^n}\Phi(\theta) + \delta^{(n)} \frac{41}{2^{2n+1}} a_n \sigma.$$

D'où, en ajoutant de $n = 1$ à n infini, et en vertu de la continuité de $F(\theta)$.

$$F(\theta + h) - F(\theta) = h\Phi(\theta) + \frac{41}{2}\delta\sigma h^2 \tag{4}$$

relation qui démontre que $\Phi(\theta)$ est la dérivée de F au point θ (première partie de l'énoncé).

Si $\theta + h$ est sur P, nous pouvons ci-dessus remplacer le point θ par le point $\theta + h$, et l'accroissement h par $-h$. On trouve alors

$$\left| \frac{\Phi(\theta + h) - \Phi(\theta)}{h} \right| < 41\,\sigma,$$

ce qui démontre la seconde partie.

Pour démontrer la troisième partie, on utilise les raisonnements de Baire sur la discontinuité ponctuelle de $f(\theta)$ sur P.

Si P *présente le caractère* (A) *et si* $F(\theta)$ *possède une dérivée seconde généralisée, toute portion* P_1 *de* P *en contient une autre* P_2 *où les conclusions du théorème* VI *sont exactes.*

Il suffit que, θ étant quelconque sur P_2, $|R(\theta, u)|$ soit borné moyennant $0 < |u| < \eta$, η étant indépendant de θ.

Des raisonnements analogues à la démonstration du théorème VI permettent de montrer que, *si* $F(\theta)$ *possède en tout point* θ *une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$, *les points où* $\Phi(\theta)$, *dérivée de* $F(\theta)$, *ou bien n'existe pas, ou bien n'admet point* $f(\theta)$ *pour dérivée approximative* (*ou exacte*), *ces points forment un ensemble de mesure nulle.*

Quand $f(\theta)$ est la somme d'une série trigonométrique partout convergente, les énoncés précédents relatifs à $F(\theta)$ sont un peu plus précis. On pourra consulter sur ces questions mes deux notes des Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam (fasc. de mai et juin 1920).

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

È ben noto come i problemi idrodinamici si studino d'ordinario nel piano, ammettendo l'ipotesi, contraddetta del resto dalla più elementare esperienza, che il moto del fluido avvenga per piani paralleli, e che quindi i risultati raggiunti per uno di tali piani valgano del pari per tutti gli altri. Se questo modo di considerare i problemi idrodinamici porta a grandi semplificazioni, specialmente in vista dell'ausilio che si può chiedere alla teoria delle funzioni di variabile complessa e della rappresentazione conforme, è ben evidente però che esso non può fornire che un'idea molto ristretta sull'effettivo moto del fluido nello spazio. Sarebbe perciò molto desiderabile che si riuscisse sempre a trasformare i teoremi del moto di una corrente fluida piana parallela, in teoremi del moto di una corrente nello spazio.

Appunto perseguendo un tale scopo nei riguardi del teorema della *forza sostentatrice*, dimostrato da N. Joukowski (1) nel caso di una corrente piana parallela, ci si è presentato il problema di estendere l'ordinario concetto di circuitazione lungo linee chiuse.

In questa Nota I noi definiremo pertanto la *circuitazione di un vettore lungo una superficie chiusa*, o *circuitazione superficiale.*

(1) N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki]. Paris, Gauthier Villars, 1916. V. anche: H. Lamb, *Hydrodynamics*; Cambridge, 1916, pag. 666.