ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Pour démontrer la troisième partie, on utilise les raisonnements de Baire sur la discontinuité ponctuelle de $f(\theta)$ sur P.

Si P *présente le caractère* (A) *et si* $F(\theta)$ *possède une dérivée seconde généralisée, toute portion* P_1 *de* P *en contient une autre* P_2 *où les conclusions du théorème* VI *sont exactes.*

Il suffit que, θ étant quelconque sur P_2, $|R(\theta, u)|$ soit borné moyennant $0 < |u| < \eta$, η étant indépendant de θ.

Des raisonnements analogues à la démonstration du théorème VI permettent de montrer que, *si* $F(\theta)$ *possède en tout point* θ *une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$, *les points où* $\Phi(\theta)$, *dérivée de* $F(\theta)$, *ou bien n'existe pas, ou bien n'admet point* $f(\theta)$ *pour dérivée approximative* (*ou exacte*), *ces points forment un ensemble de mesure nulle.*

Quand $f(\theta)$ est la somme d'une série trigonométrique partout convergente, les énoncés précédents relatifs à $F(\theta)$ sont un peu plus précis. On pourra consulter sur ces questions mes deux notes des Comptes Rendus de l'Académie des sciences d'Amsterdam (fasc. de mai et juin 1920).

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

È ben noto come i problemi idrodinamici si studino d'ordinario nel piano, ammettendo l'ipotesi, contraddetta del resto dalla più elementare esperienza, che il moto del fluido avvenga per piani paralleli, e che quindi i risultati raggiunti per uno di tali piani valgano del pari per tutti gli altri. Se questo modo di considerare i problemi idrodinamici porta a grandi semplificazioni, specialmente in vista dell'ausilio che si può chiedere alla teoria delle funzioni di variabile complessa e della rappresentazione conforme, è ben evidente però che esso non può fornire che un'idea molto ristretta sull'effettivo moto del fluido nello spazio. Sarebbe perciò molto desiderabile che si riuscisse sempre a trasformare i teoremi del moto di una corrente fluida piana parallela, in teoremi del moto di una corrente nello spazio.

Appunto perseguendo un tale scopo nei riguardi del teorema della *forza sostentatrice*, dimostrato da N. Joukowski [1] nel caso di una corrente piana parallela, ci si è presentato il problema di estendere l'ordinario concetto di circuitazione lungo linee chiuse.

In questa Nota I noi definiremo pertanto la *circuitazione di un vettore lungo una superficie chiusa*, o *circuitazione superficiale.*

[1] N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki]. Paris, Gauthier Villars, 1916. V. anche: H. Lamb, *Hydrodynamics*; Cambridge, 1916, pag. 666.

È da rimarcare subito il fatto notevole che, mentre la circuitazione lungo linee chiuse è un *numero*, la circuitazione superficiale si presenta come un *vettore*. Questa differenza permette del resto di indagare più profondamente la natura dell'ordinaria circuitazione.

Nella Nota II infatti, dando l'espressione vettoriale della circuitazione superficiale, faremo vedere che, considerato il numero che rappresenta la ordinaria circuitazione come il modulo di un vettore, *tale vettore è precisamente quello al quale si riduce il vettore della circuitazione superficiale, quando la superficie che si considera tende a schiacciarsi su un piano*. Nella stessa Nota dimostreremo per la circuitazione superficiale teoremi tutt'affatto analoghi a quelli ben noti riguardanti la circuitazione lungo linee chiuse.

Infine nella Nota III faremo vedere come col nuovo concetto di circuitazione superficiale possa agevolmente estendersi al caso spaziale il *teorema della forza sostentatrice*.

1. Sia data una qualunque superficie chiusa σ esposta ad una corrente fluida: su questa non vogliamo per ora fare alcuna ipotesi. In ogni punto della superficie sia definito il vettore V della velocità. Supporremo, inoltre, per semplicità, che l'origine degli assi cartesiani ortogonali sia nell'interno della superficie.

Immaginando allora di sezionare la superficie data, mediante piani paralleli al piano xy, e vicini quanto si vuole l'uno all'altro, consideriamo per ogni punto della superficie la componente tangenziale [1] della proiezione della velocità su quello dei piani paralleli al piano xy che passa per il punto, e sia V_t^{xy}. Diremo allora *circuitazione delle velocità lungo la superficie chiusa* σ, *secondo la direzione dell'asse delle* z, *l'integrale doppio*

$$C^{xy} = \int_\sigma V_t^{xy} \operatorname{sen} \gamma \, d\sigma \tag{1}$$

essendo γ *l'angolo che la normale interna alla superficie* σ *forma con l'asse* z.

Possiamo trovare subito una espressione più significativa della (1).

La velocità V in un punto P della superficie abbia per componenti u, v, w; siano α, β, γ gli angoli che la normale interna in P fa con gli assi; e $\pi - \alpha'$, $\pi - \beta'$, $\gamma' = 90°$ gli angoli che con gli assi forma la proiezione della normale interna sul piano parallelo al piano xy passante per P. Proiettando V su tale piano, in V^{xy}, ed osservando che le componenti di V^{xy} sono ancora u e v, si ottiene

$$V_t^{xy} = u \operatorname{sen} \alpha' - v \cos \alpha' ; \tag{2}$$

[1] Il senso dato alla tangente essendo contrario a quello della rotazione degli indici di un orologio volto verso il senso positivo dell'asse z.

dalle relazioni

$$\text{sen}^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$
$$\text{sen}\, \gamma = -\cos \alpha \cos \alpha' - \cos \beta \, \text{sen}\, \alpha'$$

esistenti fra gli angoli $\alpha, \beta, \gamma; \alpha'$, si ricava

$$(3) \qquad \cos \alpha' = -\frac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \gamma} \quad , \quad \text{sen}\, \alpha' = -\frac{\cos \beta}{\text{sen}\, \gamma}.$$

La (1) perciò — a meno del segno che del resto può variare a seconda del senso col quale si intende calcolato l'integrale doppio — può scriversi

$$(4) \qquad C^{xy} = \int_\sigma \{ u \cos \beta - v \cos \alpha \} \, d\sigma .$$

Analogamente, immaginando di operare sezioni della superficie con piani vicini quanto si vuole l'uno all'altro e paralleli ai piani zx ed yz, e ripetendo il ragionamento fatto, si ottengono le espressioni

$$(5) \qquad C^{zx} = \int_\sigma \{ w \cos \alpha - u \cos \gamma \} \, d\sigma$$

$$(6) \qquad C^{yz} = \int_\sigma \{ v \cos \gamma - w \cos \beta \} \, d\sigma$$

che sono rispettivamente le *circuitazioni delle velocità lungo la superficie* σ *secondo le direzioni degli assi* y *e* z, *nel senso positivo che abbiamo già fissato.*

Ponendo l'equazione della superficie sotto la forma $z = z(xy)$, mediante formole note, e chiamando p e q le derivate di z, la (4) può anche scriversi

$$(7) \qquad C^{xy} = \iint \{ uq - vp \} \, dx \, dy ,$$

ed analoga forma possono evidentemente prendere anche le (5), (6).

2. Mostriamo ora che *la circuitazione lungo una superficie chiusa secondo una qualsiasi direzione, si può esprimere linearmente mediante* C^{xy}, C^{zx}, C^{yz}.

Sia ζ una retta uscente dall'origine e che faccia con gli assi gli angoli a, b, c; sezioniamo la superficie mediante piani perpendicolari a ζ.

Siano inoltre $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ rispettivamente gli angoli con gli assi della normale interna in un punto P, e della tangente in P alla linea sezione della superficie con il piano passante per P e perpendicolare a ζ.

Si hanno le relazioni

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha + \cos \beta_1 \cos \beta + \cos \gamma_1 \cos \gamma = 0$$
$$\cos \alpha_1 \cos a + \cos \beta_1 \cos b + \cos \gamma_1 \cos c = 0$$

dalle quali si ricavano subito — a meno di un fattore ϱ — i valori di $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$, $\cos \gamma_1$.

Se γ'_1 è l'angolo che la normale interna fa con ζ, si ha

$$C_\zeta = \int_\sigma \varrho \left[u \{ \cos\beta \cos c - \cos\gamma \cos b \} + \right.$$
$$+ v \{ \cos\gamma \cos a - \cos\alpha \cos c \} +$$
$$\left. + w \{ \cos\alpha \cos b - \cos\beta \cos a \} \right] \operatorname{sen} \gamma'_1 \, d\sigma$$

ma, calcolando ϱ, si ha facilmente

$$\varrho = \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma'_1}$$

e quindi

$$C_\zeta = C^{yz} \cos a + C^{zx} \cos b + C^{xy} \cos c . \tag{8}$$

La formola precedente dimostra l'assunto e ci fa vedere che C_ζ *non è altro che la proiezione sulla direzione* ζ *del vettore* **C** *della circuitazione superficiale, le cui componenti sono* C^{yz}, C^{zx}, C^{xz}.

Matematica. — *Su una superficie, del sesto ordine e della sesta classe, le cui asintotiche sono cubiche sghembe.* Nota di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre.

In una ricerca, che sto compiendo, delle superficie le cui asintotiche, dei due sistemi, sono cubiche sghembe, ho rilevato, tra le altre, una superficie di tal fatta, del sesto ordine e della sesta classe [1], che si presenta in modo particolarmente semplice, e che non mi consta sia già stata osservata. A questa F^6 si può giungere colle seguenti considerazioni.

1. Avremo ripetutamente a occuparci, nel seguito, di una particolare relazione di posizione tra una cubica sghemba C^3 e una quadrica (non degenere) Q, relazione che, come osserveremo fra poco, fu già considerata, per quanto con una definizione un po' diversa. *Diremo*, per brevità, *che una* C^3 *sghemba e una quadrica* Q *sono in posizione* γ, *quando* Q *è la quadrica fondamentale della polarità* (*ordinaria*) *definita come prodotto della polarità nulla che trasforma i punti della* C^3 *nei rispettivi piani osculatori per la involuzione biassiale di cui sono assi due tangenti della* C^3 (la polarità nulla e questa involuzione sono tra loro permutabili) [2]. Risulta

(1) Essa è ben distinta dalla F^6, di sesta classe, con asintotiche cubiche, che ammette ∞^2 trasformazioni proiettive in sè (cfr. Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse*, e *Intorno alla Memoria: le superficie con infinite....*, Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere e Arti, serie VII, voll. IV-V).

(2) Cfr. p. es. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, Bd. III (Leipzig 1909), pag. 233.