ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 dicembre 1920.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulla progagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi.* Nota del Socio Gian Antonio Maggi.

In una interessante Nota, inserita negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino [1], il Socio prof. Somigliana perviene alla conclusione che una quantità, funzione della posizione di un punto dello spazio, e del tempo, che soddisfa l'equazione di d'Alembert, non può propagarsi altrimenti che per onde piane, sferiche o cilindriche. Quella essendo un'equazione fondamentale che soddisfanno le quantità (vettori o scalari) la cui propagazione per onde traduce, in un mezzo isotropo, la propagazione della luce, secondo i principii dell'ottica fisica, tale conclusione introduce un divario fra cotesta e l'ottica geometrica, che il Somigliana chiaramente avverte, e accenna come non altrimenti atto ad essere composto che invocando i potenziali ritardati o le lunghezze d'onda estremamente piccole. Difatti, già nel caso semplicissimo di raggi formanti una stella (propria), incidenti sopra una superficie piana, che separa due mezzi, aventi indice di rifrazione diverso, le superficie parallele normali alla congruenza dei raggi rifratti — onde rifratte corrispondenti a onde sferiche incidenti, secondo l'ottica geo-

[1] *Sulla relazione fra il principio di Huyghens e l'ottica geometrica.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (giugno, 1919).

metrica — comprendono un iperboloide a due falde di rotazione, o, a seconda del caso, un ellissoide di rotazione (¹). Così, il divario si affaccia alla prima applicazione della duplice teoria, e s'intende l'interesse di conciliare la propagazione della luce per onde di forma qualsivoglia, che l'otti a geometrica costruisce, mediante il principio delle onde elementari, coll'adempimento dell'equazione di d'Alembert, che, agli elementi che traducono la luce, prescrive l'ottica fisica.

A tal fine, io rilevo che la rigorosa conclusione del Somigliana si fonda sul presupposto che la quantità che si propaga per onde sia rappresentata da una funzione del tempo e del parametro che individua le singole onde — la misura del segmento di normale compreso fra l'onda generica e un'onda assunta come base. Ora, nell'ottica fisica, le quantità che si reputano propagarsi per onde, in un mezzo isotropo, sono, di regola, rappresentate dal prodotto di un fattore composto nel suddetto modo e di un fattore semplice funzione del punto del mezzo, cioè funzione, in generale, delle tre coordinate, comunque stabilite, del punto medesimo: e la quantità a cui si prescrive di soddisfare l'equazione di d'Alembert, è, di regola, rappresentata, alla sua volta, dalla somma di più termini così formati. Anche per questo basta invocare le più semplici applicazioni: la propagazione per onde sferiche di un vettore incompressionale, quali sono i vettori che traducono la luce (§ 1). Questa circostanza vale a rimuovere l'accennata difficoltà. Ed è quanto, colla presente Nota, mi propongo principalmente di dimostrare.

§ 1. Un vettore che, come i vettori che traducono la luce, soddisfa all'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \boldsymbol{\varphi}, \tag{1}$$

e alla condizione di incompressibilità

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0, \tag{2}$$

dove i simboli hanno il noto significato, è notoriamente

$$\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{rot} \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r}, \tag{3}$$

dove $\mathbf{f}$, come $\boldsymbol{\varphi}$, è simbolo di vettore, e r indica la grandezza del raggio vettore descritto da un punto (polo), O, al punto, P, a cui si riferisce $\boldsymbol{\varphi}$.

Sotto altra forma si ha

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{r}_1 \wedge \left(\frac{\dot{\mathbf{f}}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{ar} - \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r^2} \right), \tag{4}$$

(¹) Cfr. Jamin-Bouty, *Cours de Physique de l'École Polytechnique* (Paris, Gauthier-Villars, 1887), t. III, 2ᵉ fascicule, p. 73; dove però è da correggere l'affermazione che siano quadriche tutte le superficie parallele alla quadrica costruita.

dove $\mathbf{r}_1$ indica il vettore avente l'orientazione del suddetto raggio vettore, e grandezza 1, e il punto indica derivata rispetto all'argomento.

Il vettore φ ne risulta composto dei due vettori

$$\mathbf{r}_1 \wedge \frac{\dot{\mathbf{f}}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{ar} \quad \text{e} \quad -\mathbf{r}_1 \wedge \frac{\mathbf{f}\left(\frac{r}{a} - t\right)}{r^2},$$

perpendicolari a $\mathbf{r}_1$, cioè al raggio vettore descritto da O al punto P.

Questi vettori si dicono propagarsi per onde sferiche, col centro nel polo O, con velocità di propagazione di grandezza a: e la loro direzione, ad ogni istante, risulta perpendicolare al « raggio » — la retta descritta dal centro al punto considerato — la quale è pure una proprietà caratteristica dei vettori che traducono la luce.

Il vettore $\mathbf{f}$ è arbitrario. Facciamo l'ipotesi che abbia una direzione invariabile, con che la stessa direzione invariabile avrà $\dot{\mathbf{f}}$. Allora attribuiamo questa direzione all'asse delle z, e indichiamo con f e con $\dot{f}$ le misure dei due vettori relative a questo asse. La (4) si traduce nelle equazioni scalari, dove $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ indicano le componenti di φ secondo la supposta terna di assi cartesiani ortogonali,

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi_x = \dfrac{y}{ar^2} \dot{f}\left(\dfrac{r}{a} - t\right) - \dfrac{y}{r^3} f\left(\dfrac{r}{a} - t\right), \\ \varphi_y = -\dfrac{x}{ar^2} \dot{f}\left(\dfrac{r}{a} - t\right) + \dfrac{x}{r^3} f\left(\dfrac{r}{a} - t\right), \\ \varphi_z = 0. \end{cases}$$

Il vettore φ risulta avere, in ogni punto della superficie dell'onda, la direzione della tangente al parallelo relativo al diametro avente la direzione del vettore $\mathbf{f}$.

Gli scalari che formano i due termini dei secondi membri delle (5), come i vettori che hanno per componenti i termini in colonna delle stesse equazioni, si dicono propagarsi per le indicate onde sferiche, colla indicata velocità di propagazione di grandezza a: sono ciascuno il prodotto di una funzione dell'argomento $\frac{r}{a} - t$ per una funzione delle coordinate del relativo punto; infine, la somma delle quantità omologhe, come appartenenti ad uno stesso componente di φ, e la somma dei due vettori, soddisfa l'equazione di d'Alembert.

§ 2. Immaginata una serie di superficie parallele di forma qualsivoglia, e indicata con r la misura del segmento di normali comuni, compreso fra una particolare superficie della serie, « base », e la superficie generica (parametro individuante questa superficie, e la base con $r = 0$), una quantità che si dice propagarsi per l'indicata serie di onde, con velocità di propagazione di grandezza a, ha, alla stregua delle applicazioni, in generale, la forma

$$\varphi_1(\mathrm{P})\,\varphi_2\left(\frac{r}{a}-t\right),$$

dove φ_2 è simbolo di scalare, e $\varphi_1(\mathrm{P})$ (scalare o vettore) indica una funzione del punto, P, a cui si riferisce la quantità.

Notiamo che la presenza del fattore $\varphi_1(\mathrm{P})$ non modifica questa circostanza caratteristica della propagazione per onde, colla indicata velocità, la quale è un'immediata conseguenza della forma del secondo fattore. Se, ad un istante, i valori diversi da 0 della quantità sono confinati entro uno strato limitato da due superficie d'onda, allora, sopra ogni superficie d'onda, i valori diversi da 0 non si mantengono che per un tempo eguale a quello che impiega la propagazione ad attraversare il suddetto strato.

§ 3. Poniamo ora, riferendoci a superficie parallele di forma qualsivoglia, individuate dal parametro r (§ 2),

$$\psi(\mathrm{P}\,,t)=f_1(\mathrm{P})\cos\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)+f_2(\mathrm{P})\sin\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right), \tag{1}$$

dove $\psi(\mathrm{P}\,.\,t)$, $f_1(\mathrm{P})$, $f_2(\mathrm{P})$ indicano, pel momento, funzioni scalari, e procuriamo di trovare le condizioni necessarie e sufficienti, a cui debbono soddisfare $f_1(\mathrm{P})$, $f_2(\mathrm{P})$ (o brevemente f_1, f_2) perchè $\psi(\mathrm{P}\,,t)$ (o brevemente ψ) soddisfaccia l'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=a^2\,\Delta_2\psi\,. \tag{2}$$

Si ha, in primo luogo,

$$\Delta_2\psi=\Delta_2\left[f_1\cos\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)\right]+\Delta_2\left[f_2\sin\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)\right]:$$

in secondo luogo, indicando con u, v due funzioni regolari qualsivogliano del punto P,

$$\Delta_2(uv)=v\,\Delta_2 u+2\,\nabla(uv)+u\,\Delta_2 v:$$

in terzo luogo, supposta u funzione delle coordinate del punto P, composta col parametro r, relativo alle supposte superficie parallele (§ 2),

$$\nabla_2(uv)=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}:$$

infine, nella stessa ipotesi,

$$\Delta_2 u=\left(\frac{1}{\mathrm{R}+r}+\frac{1}{\mathrm{S}+r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

dove R e S indicano i raggi di curvatura principali, nel punto della superficie base (§ 2), intersezione della medesima colla normale alla superficie $r =$ cost., nel punto P [1].

Colle quali formole, calcolando il suddetto $\Delta_2\psi$, e valendosi di

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\alpha^2\left(f_1 \cos\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)+f_2\sin\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)\right),$$

si trova

$$a^2\Delta_2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$= a\left[a\Delta_2 f_1 + 2\alpha\frac{\partial f_2}{\partial r}+\alpha\left(\frac{1}{R+r}+\frac{1}{S+r}\right)f_2\right]\cos\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right)$$

$$+ a\left[a\Delta_2 f_2 - 2\alpha\frac{\partial f_1}{\partial r}-\alpha\left(\frac{1}{R+r}+\frac{1}{S+r}\right)f_1\right]\sin\alpha\left(\frac{r}{a}-t\right).$$

Donde si conclude che condizioni necessarie e sufficienti perchè ψ, rappresentato dalla (1), soddisfaccia (2), sono che f_1, f_2 soddisfacciano le due equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} a\Delta_2 f_1 + 2\alpha\dfrac{\partial f_2}{\partial r}+\alpha\left(\dfrac{1}{R+r}+\dfrac{1}{S+r}\right)f_2 = 0\,, \\ a\Delta_2 f_2 - 2\alpha\dfrac{\partial f_1}{\partial r}-\alpha\left(\dfrac{1}{R+r}+\dfrac{1}{S+r}\right)f_1 = 0\,. \end{cases}$$

Supposto

$$R = S = \infty,$$

cioè le onde piane, queste equazioni diventano, inteso il piano xy parallelo alle onde,

$$a\Delta_2 f_1 + 2\alpha\frac{\partial f_2}{\partial r} = 0\quad,\quad a\Delta_2 f_2 - 2\alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0\,,$$

soddisfatte da f_1, f_2 costanti.

Supposto

$$R = S = 0\,,$$

cioè le onde sferiche, le equazioni diventano, assunto per polo dei raggi r il centro comune delle sfere,

$$(5)\qquad a\Delta_2 f_1 + 2\alpha\frac{\partial f_2}{\partial r}+\frac{2\alpha}{r}f_2 = 0\quad,\quad a\Delta_2 f_2 - 2\alpha\frac{\partial f_1}{\partial r}-\frac{2\alpha}{r}f_1 = 0\,.$$

[1] Con semplice calcolo si trova

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial r},$$

dove X, Y, Z indicano i coseni di direzione della normale alla superficie $r =$ cost., nel punto P, e, per una nota relazione,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{1}{R_r}+\frac{1}{S_r},$$

dove $R_r = R + r$, $S_r = S + r$ indicano i raggi di curvatura principali nello stesso punto P.

Si verifica facilmente che queste equazioni sono soddisfatte da

$$(6) \qquad f_1 = -\frac{y}{r^3}\,,\ f_2 = \frac{\alpha}{a}\frac{y}{r^2} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{x}{r^3}\,,\ f_2 = -\frac{\alpha}{a}\frac{x}{r^2}\,,$$

conformemente alle (5) del § 2, dove si faccia

$$f(u) = \cos \alpha u\,,\ \dot{f}(u) = -\alpha \sin \alpha u\,.$$

§ 4. Le equazioni (3) del paragrafo precedente potranno formare oggetto di particolare ricerca. Limitiamoci qua a rilevare che l'ipotesi che una soluzione sia univocamente determinata, coll'assegnare sul contorno del campo considerato, per ogni valore del tempo, i valori delle funzioni $f_1(\mathrm{P})$, $f_2(\mathrm{P})$, collima col noto fatto che una soluzione dell'equazione di d'Alembert [(2) del paragrafo precedente] è univocamente determinata, coll'assegnare, per ogni valore del tempo, sul contorno del campo, i valori della funzione ψ, e, per un valore del tempo, i valori della funzione ψ e della sua derivata rispetto al tempo, in ogni punto del campo. Difatti, da quella ipotesi segue che, colla prescritta forma della soluzione dell'equazione di d'Alembert, questa soluzione è univocamente determinata. Ora, con questo, è assegnato sul contorno, per ogni valore del tempo, il valore della funzione $\psi(\mathrm{P}\,,t)$, conformemente alla (1) del paragrafo precedente. D'altra parte, da questa espressione e da quella che se ne ricava per la derivata rispetto al tempo, cioè da

$$\psi(\mathrm{P}\,,t) = f_1(\mathrm{P}) \cos \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right) + f_2(\mathrm{P}) \sin \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right),$$

$$\frac{\partial\psi(\mathrm{P}\,,t)}{\partial t} = \alpha\left[f_1(\mathrm{P}) \sin \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right) - f_2(\mathrm{P}) \cos \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right)\right],$$

si deduce immediatamente che, note $f_1(\mathrm{P})$, $f_2(\mathrm{P})$, per ogni punto del campo, sono noti, per gli stessi punti, i valori per $t = 0$ di ψ e della sua derivata rispetto al tempo t, e viceversa. Per modo che l'ipotesi che siano assegnati sul contorno i valori delle $f_1(\mathrm{P})$, $f_2(\mathrm{P})$ congloba le circostanze determinatrici suddette della soluzione dell'equazione di d'Alembert ([1]).

§ 5. Poniamo

$$\boldsymbol{\psi}(\mathrm{P}\,,t) = \mathbf{f}_1(\mathrm{P}) \cos \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right) + \mathbf{f}_2(\mathrm{P}) \sin \alpha\left(\frac{r}{a} - t\right),$$

dove $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ sono simboli di vettori, e intendiamo che $\mathbf{f}_1(\mathrm{P})$, $\mathbf{f}_2(\mathrm{P})$ soddisfacciano (posti per f_1, f_2) le equazioni (3) del § 3. Il vettore $\boldsymbol{\psi}(\mathrm{P}\,,t)$ soddisfarà l'equazione di d'Alembert [(1) del § 1].

Poniamo poi

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathrm{P}\,,t) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\psi}(\mathrm{P}\,,t)\,.$$

([1]) Analoghe conclusioni si ricavano dalle condizioni determinatrici che siano dati, sul contorno, per ogni valore del tempo, i valori della derivata di ψ secondo la normale interna, o questi su parte del contorno, e i valori di ψ sulla parte complementare.

Il vettore $\varphi(\mathrm{P}, t)$ soddisfarà anche la condizione di incompressibilità [soddisfarà (1) e (2) del § 1].

Si trova immediatamente, indicando con $g(r)$ uno scalare, funzione del parametro r,

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{f}(\mathrm{P})\, g(r)) = g(r)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathrm{P}) + \dot{g}(r)\, \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}(\mathrm{P}),$$

dove $\mathbf{r}_1$ indica un vettore avente la direzione della normale alla superficie $r = \text{cost.}$ nel punto P, e per grandezza l'unità. Ne viene

$$\varphi(\mathrm{P}, t) = \mathbf{F}_1(\mathrm{P}) \cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) + \mathbf{F}_2(\mathrm{P}) \sin \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) \tag{1}$$

dove

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathrm{P}) &= \mathrm{rot}\,\mathbf{f}_1(\mathrm{P}) + \frac{\alpha}{a}\, \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_2(\mathrm{P}), \\ \mathbf{F}_2(\mathrm{P}) &= \mathrm{rot}\,\mathbf{f}_2(\mathrm{P}) - \frac{\alpha}{a}\, \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{f}_1(\mathrm{P}). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Poichè $\varphi(\mathrm{P}, t)$ soddisfa l'equazione di d'Alembert [(1) del § 1], $\mathbf{F}_1(\mathrm{P}), \mathbf{F}_2(\mathrm{P})$ dovranno soddisfare le (3) del § 3.

Si trova poi facilmente, in base a (1),

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\varphi = \left(\mathrm{div}\,\mathbf{F}_1 + \frac{\alpha}{a}\mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_1\right) \cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right) + \\ + \left(\mathrm{div}\,\mathbf{F}_2 - \frac{\alpha}{a}\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1\right) \sin \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Per cui, soddisfacendo $\varphi(\mathrm{P}, t)$ la condizione di incompressibilità [(2) del § 1], $\mathbf{F}_1(\mathrm{P}), \mathbf{F}_2(\mathrm{P})$ debbono ancora soddisfare le equazioni

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F}_1 + \frac{\alpha}{a}\mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_1 = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\,\mathbf{F}_2 - \frac{\alpha}{a}\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 = 0, \tag{4}$$

che si verifica facilmente come scaturiscano dalle (2), qualunque siano $\mathbf{f}_1(\mathrm{P}), \mathbf{f}_2(\mathrm{P})$.

Nell'ipotesi, di cui al § 4 abbiamo rilevato il significato, che una soluzione delle (3) del § 3 sia univocamente determinata dai valori delle funzioni $f_1(\mathrm{P}), f_2(\mathrm{P})$ sul contorno del campo, il vettore in discorso $\varphi(\mathrm{P}, t)$ sarà univocamente determinato nel campo, dati sul contorno i valori delle due funzioni $\mathbf{F}_1(\mathrm{P}), \mathbf{F}_2(\mathrm{P})$, colla condizione che questi valori soddisfacciano le (4), applicate ai punti del contorno.

Naturalmente, resta impregiudicata la questione dell'esistenza della soluzione del duplice sistema di equazioni alle derivate parziali.

La condizione che il vettore $\varphi(\mathrm{P}, t)$ sia parallelo al pian tangente in P alla superficie $r = \text{cost.}$ si traduce, per (1), in

$$\mathbf{F}_1(\mathrm{P}) \times \mathbf{r}_1 = 0 \quad , \quad \mathbf{F}_2(\mathrm{P}) \times \mathbf{r}_1 = 0, \tag{5}$$

con che le (4) si riducono a

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F}_1 = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{F}_2 = 0 .$$

Per le superficie sferiche concentriche (assunto il centro comune per polo dei raggi r) il doppio sistema di equazioni alle derivate parziali, di cui il secondo è rappresentato dalle (6), è soddisfatto, conformemente alle (5) del § 1, dove si faccia $f(u) = \cos \alpha u$, $\dot{f}(u) = -\alpha \sin \alpha u$, da

$$\mathbf{F}_1(\mathrm{P}) = -\frac{y}{r^3}\,\mathbf{i} + \frac{x}{r^3}\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{F}_2(\mathrm{P}) = \frac{\alpha}{a}\,\frac{y}{r^2}\,\mathbf{i} - \frac{\alpha}{a}\,\frac{x}{r^2}\,\mathbf{j} .$$

Si verifica, come abbiamo detto (§ 3), che i coefficienti omologhi soddisfanno le (3) del § 3, e si trova anche subito che sono soddisfatte

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{i,x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{i,y}}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1 , 2) ,$$

relazioni che traducono le suddette (6).

§ 6. Tornerebbe acconcio, come conclusione, di applicare i precedenti risultati allo studio della formazione delle onde riflesse e delle onde rifratte dal piano $z = 0$, concepito come superficie di separazione di due distinti mezzi isotropi, corrispondenti a onde incidenti, rappresentate dalle (5) del § 1, procurando di ricondurre le condizioni, atte a determinare le soluzioni delle equazioni differenziali, all'eguaglianza, sulle due pagine del piano $z = 0$, delle componenti, secondo gli assi delle x e delle y, del vettore elettrico e del vettore magnetico. Al qual proposito, osserviamo che, contando r dal centro delle onde incidenti, per queste onde, dal punto simmetrico ad esso, rispetto al piano $z = 0$, per le onde riflesse, e dalla quadrica accennata nell'introduzione, per le onde rifratte, il rapporto $\frac{r}{a}$ avrà il medesimo valore, in ogni punto del piano $z = 0$, per le tre specie di onde: per modo che la suddetta equazione si tradurrà in eguaglianza di coefficienti di $\cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right)$ e di $\sin \alpha \left(\frac{r}{a} - t\right)$, in ogni punto, P, delle due pagine del piano $z = 0$. Ma vuolsi tener presente che i suddetti vettori non soddisfanno l'equazione di d'Alembert che in quanto soddisfanno le equazioni di Hertz, le quali, tra l'altro, stabiliscono una relazione *a priori* fra le due specie di vettori. Per cui codesto studio potrà meglio formare oggetto di una ricerca, dove, sotto il precedente aspetto, siano considerate le equazioni di Hertz, da far seguire alla presente, della quale, a malgrado delle circostanze, attinenti a questioni generali dell'Analisi, che restano da esaminare, mi sembra abbastanza conseguito lo scopo.