# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXIX.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *I teoremi di unicità per le equazioni differenziali del 3° ordine paraboliche lineari.* Nota II del dott. E. Del Vecchio, presentata dal Corrisp. Guido Fubini.

*Teoremi di unicità per*:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + fz + g = 0\,.$$

Alcune modificazioni si devono apportare al procedimento e al risultato della Nota I per esprimere il teorema di unicità per l'equazione (II), che delle derivate in $y$ contiene solo $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Teorema di unicità. *Se il campo* C *soddisfa a tutte le condizioni della Nota I; se i coefficienti* $c(x,y)$, $a(x,y)$, $d(x,y)$, $f(x,y)$ *sono finiti e continui in* C *insieme con le rispettive derivate* $\dfrac{\partial c}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2}$; $\dfrac{\partial a}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial d}{\partial x}$ *e di più* $c(x,y)$ *è sempre di uno stesso segno,*

*non possono esistere in detto campo due soluzioni distinte della* (II) *le quali soddisfino alle condizioni*:

$h'$) $z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *siano finite e continue in* C;

$k'$) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *siano integrabili in* C, *e di più si abbia*:

$$\int \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi(y)\,;\; \int \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy = \frac{\partial z}{\partial y} + \chi(x)\,;$$

*assumano sul contorno* $c$ *di* C *gli stessi valori arbitrariamente dati e sieno tali che le loro prime derivate in* $x$ *assumano gli stessi valori, pure arbitrariamente dati, su* $s_0$, *in cui* $dy < 0$, *quando il coefficiente* $c(x,y)$ *di* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *è positivo in* C; *su* $s_1$, *in cui* $dy > 0$, *quando* $c(x,y)$ *è negativo in* C (1).

(1) S'intende di percorrere $s_0$ e $s_1$ nel verso prefissato pel contorno. Contrariamente a quanto facemmo nella Nota I per l'equazione (I), dobbiamo distinguere $s_0$ da $s_1$. Ciò è in relazione al fatto che, mutando segno a $x$ e $y$, in C si scambiano tra loro $s_0$ e $s_1$, e la (II), diversamente a quanto accade per la (I), si muta in un'altra dello stesso tipo, ma avente di segno contrario il coefficiente della derivata in $y$.

Per le stesse ragioni della Nota I poniamo: $\xi = \xi(x)\,;\, \eta = \eta(y)$, con la quale trasformazione la (II) si muta nell'altra:

$$(\mathrm{II}_1)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial \xi^3} + p_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + q_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + r_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + s_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + t_1 z + u_1 = 0$$

con

$$p_1 = \frac{c\left(\dfrac{d\eta}{dy}\right)^2}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\ ;\ q_1 = \frac{3\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + a\dfrac{d\xi}{dx}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^2}\ ;\ r_1 = \frac{\dfrac{d^3\xi}{dx^3} + a\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + d\dfrac{d\xi}{dx}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\ ;$$

$$s_1 = \frac{c\dfrac{d^2\eta}{dy^2}}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\ ;\ t_1 = \frac{f}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}\ ;\ u_1 = \frac{g}{\left(\dfrac{d\xi}{dx}\right)^3}.$$

Se la trasformazione conserva le proprietà dei coefficienti dell'equazione, valgono le formole che si ottengono ponendo nelle (3) della Nota I $s_1, q_1, r_1$ invece di $p, q, r$; inoltre si ha:

$$\iint_{C'} p_1 z \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\, d\xi\, d\eta = -\int_{c'} p_1 z \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\xi + \frac{1}{2}\int_{c'} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} z^2\, d\xi -$$
$$- \iint_{C'} p_1 \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 d\xi\, d\eta + \frac{1}{2}\iint_{C'} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} z^2\, d\xi\, d\eta.$$

Cosicchè, se $z_1$ e $z_2$ sono due soluzioni della $(\mathrm{II}_1)$ soddisfacenti alle condizioni indicate, per $v = z_1 - z_2$ si ha:

$$\iint_{C'} v\left(\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} + p_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + r_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + s_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + t_1 v\right) d\xi\, d\eta = 0$$

da cui, applicando le predette formule e tenendo conto delle proprietà al contorno della $v$, ricaviamo:

$$(4_1)\qquad -\frac{1}{2}\int \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 d\eta - \iint_{C'} q_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 d\xi\, d\eta - \iint_{C'} p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 d\xi\, d\eta +$$
$$+ \iint_{C'} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial s_1}{\partial \eta} + t_1\right] v^2\, d\xi\, d\eta = 0\,;$$

il primo integrale va esteso a $s_1'$ o $s_0'$ secondochè $c(x, y)$ è positivo o negativo in C.

*$c(x, y)$ è positivo in* C. Il primo integrale della $(4_1)$ è non positivo; il teorema pertanto resterà dimostrato se determineremo una trasformazione per la quale risulti:

$$\text{in C'}\quad q_1 > 0\,,\ p_1 > 0\,,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial s_1}{\partial \eta} + t_1 < 0\,;$$

inoltre $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}$ positivi in tutto C (cosicchè questo viene trasformato in C' dello stesso tipo, di cui $s'_0$ e $s'_1$ hanno rispettivamente $d\eta < 0$, $d\eta > 0$); per la quale da ultimo sono mantenute le proprietà dei coefficienti.

La prima disuguaglianza equivale a: $3\frac{\partial^2\xi}{dx^2} + a\frac{d\xi}{dx} > 0$, che è soddisfatta insieme con l'equazione $3\frac{d^2\xi}{dx^2} + m_1\frac{d\xi}{dx} = F_1(x)$, se $\frac{d\xi}{dx} > 0$ e se $m_1$ è il minimo di $a(x, y)$ e $F_1(x)$ una funzione arbitraria, positiva in C e soddisfacente a determinate condizioni. Ricaviamo:

$$\xi = \int \left\{ e_l^{-\frac{m_1 x}{3}} \left[ \frac{1}{3}\int F_1(x)\, e_l^{\frac{m_1 x}{3}}\, dx + H_1 \right] \right\} dx + K_1 ,$$

di cui $\frac{d\xi}{dx}$ può supporsi positiva.

La seconda disuguaglianza, che è espressa da $\frac{c\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3} > 0$, è sempre soddisfatta.

L'ultima disuguaglianza equivale all'altra:

$$c\frac{d^3\eta}{dy^3} + 2\frac{\partial c}{\partial y}\frac{d^2\eta}{dy^2} + \left[\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \psi_1(x, y)\right]\frac{d\eta}{dy} < 0 ,$$

cui si giunge eseguendo i calcoli e facendo alcune trasformazioni, ed in cui

$$\psi_1(x, y) = 2\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^3 \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_1}{\partial \xi} + t_1\right].$$

Se indichiamo con $m_1^2$ il minimo (positivo) di $c(x, y)$ in C e inoltre con $M_1^2$, $n_1^2$ numeri positivi tali che: $2\frac{\partial c}{\partial y} < M_1^2$; $\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \psi_1(x, y) < n_1^2$, la precedente disuguaglianza sarà soddisfatta insieme con l'equazione:

$$m_1^2\frac{d^3\eta}{dy^3} + M_1^2\frac{d^2\eta}{dy^2} + n_1^2\frac{d\eta}{dy} = 0 ,$$

se $\frac{d\eta}{dy}$ e $\frac{d^2\eta}{dy^2}$ sono positive e $\frac{d^3\eta}{dy^3}$ negativa. Perciò possiamo prendere $\frac{d\eta}{dy} = P\, e_l^{\alpha y} + Q\, e_l^{\beta y}$, in cui P e Q sono costanti arbitrarie e $\alpha$ e $\beta$ sono soluzioni dell'equazione: $m_1^2 x^2 + M_1^2 x + n_1^2 = 0$, da cui il valore di $\eta$. Se si prende, come è lecito, $M_1^2$ abbastanza grande le soluzioni $\alpha, \beta$ sono reali e negative. Pertanto, imponendo le relative condizioni, si scorge abbastanza facilmente che si possono doterminare P e Q di segni opposti e tali che $\frac{d\eta}{dy}$ e $\frac{d^2\eta}{dy^2}$ risultino positive e quindi, come risulta subito dall'equazione differenziale, $\frac{d^3\eta}{dy^3}$ negativa.

Analogo procedimento, con opportune modificazioni, vale se $c(x, y)$ è *negativo.*

*Il teorema di unicità resta così dimostrato.*

*I teoremi di unicità* per l'equazione (I) della Nota I, e per l'equazione (II), *possono estendersi a campi estendentisi all'infinito,* purchè la soluzione dell'equazione, nei punti all' $\infty$, sia infinitesima di un certo ordine.

## Fisica. — *Potenziale di eccitazione per gli elettroni nella miscela di vapori di potassio e sodio* [1]. Nota del prof. A. Campetti, presentata dal Socio A. Naccari.

1°) Sono ben note le esperienze di Frank ed Hertz [2] relative alla eccitazione ed ionizzazione in un gas o vapore per opera degli elettroni (generalmente emessi da un filo incandescente), accelerati da un'opportuna caduta di potenziale: i detti A, sperimentando col vapore di mercurio, trovarono che, colla caduta di potenziale di circa 4,9 Volt, l'energia ceduta dagli elettroni agli atomi è emessa, almeno in parte, come radiazione monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 2536{,}72$, u. Å, radiazione di cui la frequenza $\nu$ soddisfa alla nota relazione della teoria dei quanti $h\nu = eV$.

L'interpretazione data da Franck ed Hertz alle loro esperienze fu in parte modificata in successivi lavori, tra cui conviene specialmente ricordare quelli di Mac Lennann e Henderson [3], Goucher [4], Tate e Foote [5], ecc. Dall'insieme di queste esperienze apparirebbe dimostrato che per molti vapori metallici vi sono due potenziali critici di eccitazione; il primo (*potenziale di prima eccitazione o di risonanza senza ionizzazione*) soddisfa alla relazione $h\nu = eV$, essendo $\nu$ la frequenza dell'unica radiazione eccitata; il secondo (*potenziale di eccitazione completa o di ionizzazione*) soddisfa pure alla relazione $h\nu = eV$, quando al posto di V si ponga la *frequenza limite* della serie eccitata.

2°) Nel presente lavoro ho voluto iniziare l'esame del comportamento di miscugli di vapori: per ora mi sono limitato alla miscela di vapore di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Torino.
(2) Franck ed Hertz, Verh. der D. Phys. Geselt., 16, 1914.
(3) Proc. Roy. Soc., 91, 1915; 92, 1916.
(4) Phys. Rev., 8, 1916; 10, 1917.
(5) Phys. Rev., 10, 1917; Wash. Acad. Sciences, 1917; Bureau of Standards, 14, 1918.