ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie.* III: *Sistema dei covarianti di dato grado, e teorema di Sylvester.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

7. In questa Nota mi propongo di approfondire l'interpretazione geometrica dei covarianti d'una forma binaria stabilita nelle precedenti, collegandola alla considerazione dei sistemi lineari di ipersuperficie di S_n uniti per le trasformazioni del gruppo Γ, e traendone una visione d'assieme del sistema dei covarianti di dato grado, che mi sembra atta a gettar luce sull'impostazione di alcuni problemi generali.

Lo strumento di cui principalmente mi giovo è un importante risultato di Fano (contenuto nella Memoria già citata) sulla struttura dei gruppi continui ∞^3, non integrabili, di trasformazioni proiettive d'uno spazio lineare S_d, i cui dettagli verranno precisati man mano che lo richiederà la trattazione.

8. Sia dapprima Φ un covariante di grado l ed ordine m della forma binaria f, Σ il sistema delle relative Δ_P. Il *minimo* sistema lineare L di ipersuperficie d'ordine l di S_n contenente totalmente Σ, è evidentemente quello a cui appartengono le ipersuperficie ottenute eguagliando a zero gli $m+1$ coefficienti di Φ, e quindi la sua dimensione d è $\leq m$. In virtù della sua stessa definizione, L è mutato in sè da tutte le trasformazioni di Γ.

Considerando le ipersuperficie di L come elementi o punti di uno spazio S_d, il gruppo Γ v'induce un gruppo ∞^3, G di proiettività, che mutano in sè la curva C i cui punti corrispondono alle Δ_P di Σ, curva che chiameremo *imagine* del covariante Φ. Essa è d'ordine m, giacchè, come risulta dalla definizione di Σ data al n. 3, un sistema lineare ∞^{d-1} contenuto in L ha m ipersuperficie comuni con Σ.

Poichè le trasformazioni di G subordinano sulla curva razionale C il gruppo ∞^3 delle relative trasformazioni birazionali, così, se fosse $m > d$, quel gruppo dovrebbe mutare in sè la g^d_m delle sezioni iperpiane di C, mentre è noto che sopra un ente razionale non esistono serie lineari (incomplete) invarianti.

Sarà dunque $d = m$, e quindi la C sarà una C^m razionale normale; in altre parole gli $m+1$ coefficienti di Φ sono linearmente indipendenti.

9. Anzichè partirci, come al n. prec. dal covariante Φ, prendiamo ora le mosse da un sistema L, ∞^d, d'ipersuperficie d'ordine l di S_n unito in Γ,

e poniamo come prima gli elementi di L in corrispondenza biunivoca coi punti di un S_d. Il gruppo G di trasformazioni proiettive *indotto* ivi da Γ, sarà anch'esso ∞^3, giacchè se l'isomorfismo tra G e Γ non fosse oloedrico, all'identità in G, corrisponderebbe entro Γ. un sottogruppo invariante, mentre Γ, come il gruppo ∞^3 delle proiettività di r a cui è isomorfo, è *semplice* cioè non contiene sottogruppi invarianti (¹). Inoltre per l'identità di struttura tra G e Γ, risulterà semplice anche G.

Sia ora C una curva di S_d unita in G. Un suo punto qualunque D risulterà unito per le ∞^2 trasformazioni d'un sottogruppo g di G; e pertanto l'ipersuperficie Δ di S_n corrispondente a D sarà pure unita per le trasformazioni d'un sottogruppo ∞^2, γ, di Γ, cioè per le trasformazioni di Γ che lascian fisso un certo punto P di C^n. Al variare di D su C, l'ipersuperficie Δ descrive dunque un sistema Σ, cioè C *è imagine d'un covariante* Φ *di* f che si dirà *appartenente* al sistema L.

La ricerca di tutti i covarianti appartenenti ad L è dunque ricondotta a quella delle curve (razionali normali) di S_d unite in G.

10. Ricorriamo ora ai risultati di Fano. Anzitutto teniamo conto che *ogni gruppo proiettivo semplice* ∞^3 *di uno spazio* S_d *trasforma in sè un certo numero di curve razionali normali di ordine* $\leq d$ *che appartengono a spazî fra di loro indipendenti e i cui ordini aumentati ciascuno di un'unità dànno per somma* $d+1$.

Dette $C^{h_1}, C^{h_2}, \ldots, C^{h_t}$ quelle curve, appartenenti agli spazî $S_{h_1}, S_{h_2}, \ldots, S_{h_t}$, potremo, per quanto precede, associare ad esse altrettanti covarianti Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_t$ appartenenti al sistema L, e di ordini rispettivi $h_1, h_2, \ldots, h_t$ tali che $\sum_{i=1}^{t}(h_i+1)=d+1$. Non è escluso che qualcuna delle h_i possa annullarsi, cioè che la corrispondente curva si riduca ad un punto; ognuno di tali punti è imagine di un covariante d'ordine zero, cioè di un invariante di f.

Ci proponiamo ora di provare che i covarianti predetti costituiscono *un sistema linearmente* (²) *completo di covarianti appartenenti al sistema lineare* L, cioè che ogni altro covariante appartenente ad L è una combinazione lineare a coefficienti costanti di covarianti (dello stesso ordine) estratti dal gruppo considerato.

11. Sia difatti Ψ un covariante, d'ordine h, appartenente ad L, e distinto da $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_t$. La sua imagine in S_d sarà una curva razionale normale C^h, unita in G, e distinta da $C^{h_1}, C^{h_2}, \ldots, C^{h_t}$; e questa circo-

(¹) Cfr. Fano, loc. cit., pag. 189.

(²) L'aggettivo *linearmente* si aggiunge per evitare equivoci dipendenti dal significato che la locuzione *sistema completo* di forme invariantive ha nella teoria classica.

stanza, come ha dimostrato il Fano [1], può verificarsi soltanto se due o più fra i numeri h_i sono eguali tra di loro e ad h.

Supponiamo per semplicità che sia $h_1 = h_2 = h$, le altre h_i essendo diverse da h, e diciamo corrispondenti sulle due curve C^{h_1}, C^{h_2} due punti P_1, P_2 quando sono uniti per lo stesso sottogruppo ∞^2, g, di G, cioè quando sono imagini di due ipersuperficie Δ'_P, Δ''_P relative ai covarianti Φ_1, Φ_2 e allo *stesso* punto P di C^n.

Allora, in virtù delle conclusioni di Fano, gli unici punti dello S_{2h+1} individuato da S_{h_1}, S_{h_2} uniti per tutte le operazioni di g, son quelli della retta $P_1 P_2$; e ognuno di essi individua una C^h razionale normale unita in G. Queste C^h sono direttrici della rigata R generata dalle rette congiungenti punti corrispondenti di C^{h_1}, C^{h_2}, e di esse ne passa una sola per ogni punto di R; inoltre all'infuori di esse non vi sono in S_d altre curve d'ordine l mutate in sè dalle operazioni di G. Al sistema di queste C_h appartiene dunque anche l'imagine del covariante Ψ.

D'altra parte poichè Φ_1 e Φ_2 hanno lo stesso ordine, ogni forma

$$\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2,$$

è un covariante di f; e la relativa imagine in S_d è quindi una C^h razionale normale, variabile in un sistema continuo ∞^1. Questo non potrà esser distinto dal sistema predetto, e quindi per convenienti valori di λ, μ si avrà:

$$\Psi \equiv \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2 \qquad \text{c. d. d.}$$

12. Supponiamo ora che L sia il sistema di tutte le forme d'ordine l dello S_n che è evidentemente unito per le operazioni del gruppo Γ. Sarà $d = \binom{l+n}{n} - 1$ e quindi potremo concludere col seguente teorema di Sylvester [2]:

La somma degli ordini dei covarianti linearmente indipendenti, di dato grado l, relativi ad una forma binaria d'ordine n aumentati ciascuno di un'unità, è eguale ad $\binom{l+n}{n}$.

In altre parole il numero complessivo dei coefficienti d'un sistema linearmente completo di covarianti di grado l, relativi ad una forma d'ordine n è $\binom{l+n}{n}$; ed inoltre, come risulta dalle considerazioni precedenti, a quei

(1) Loc. cit., n. 16.

(2) Sylvester, *Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées* [Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) pp. 89-114] pag. 109. Cfr. anche Stroh, *Zur Theorie der Combinanten* [Math. Annalen, Bd. 22 (1883) pp. 393-405] pag. 405. Il teorema è stato esteso a più forme binarie da Study, *Methoden zur Theorie der ternaeren Formen* [Leipzig, Teubner (1889)] pag. 100.

coefficienti corrispondono, nello S_d rappresentativo di tutte le forme d'ordine l di S_n, $d+1$ punti linearmente indipendenti. Sicchè dal teorema predetto si desume la proprietà seguente:

Ogni forma d'ordine l in $n+1$ variabili $a_0, a_1, \ldots, a_n$, può esprimersi come combinazione lineare dei coefficienti d'un sistema linearmente completo di covarianti dello ztesso grado, relativi ad una forma binaria a_x^n d'ordine n.

G. C.