ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1920.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Analisi. — *Sulla funzione iterata di una razionale intera.* Nota II del Socio S. Pincherle (1).

1. In una precedente Nota dal medesimo titolo (2), si sono date le proprietà del campo Ω del piano della variabile complessa x, definito dal fatto che i punti di Ω sono mandati all'infinito dall'iterazione, indefinitamente ripetuta, dell'operazione S che sostituisce ad x il polinomio razionale intero

$$\alpha(x) \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m . \tag{1}$$

Si sono pure indicate le proprietà del contorno Γ di questo campo. Ci proponiamo ora di studiare, fra altre, una funzione che, in questo campo, è atta a dare l'iterata generale della $\alpha(x)$ e permette quindi la costruzione effettiva del gruppo continuo S^v ad un parametro. Tale studio verrà fatto nell'ipotesi che la funzione $\alpha(x)$ si trovi nel caso A (I, 9) in cui il punto $x=0$, e di conseguenza le radici di $\alpha(x)$ e della derivata $\alpha'(x)$, non appartengono ad Ω.

2. Si indicherà con ($\mathfrak{J}$) l'insieme — o spazio funzionale — delle funzioni analitiche regolari entro tutto Ω e nulle all'infinito. Ogni elemento

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1920.

(2) Questa Nota (4 giugno 1920) verrà qui richiamata con I, seguìto dal numero del paragrafo.

di $(\mathfrak{J})$ è dunque sviluppabile fuori del cerchio C_0 (I. 6) in serie della forma

(2) $$f(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots.$$

Se $f(x)$ appartiene ad $(\mathfrak{J})$, vi appartiene anche Sf.

3. Essendo R il numero definito ad I. 4, e preso $|x| = r > R$, si ha, q essendo positivo maggiore d'uno ed $x_1 = Sx$ $(x_n = S^n x)$:

$$|x_1| = r_1 > qr^{m-1}.$$

Sia ora M il massimo valore assoluto di $f(x)$ sulla circonferenza $|x| = r$ ed M_1 il massimo valore assoluto di Sf sulla medesima circonferenza: potendosi supporre senza restrizione $qr^{m-2} > 2$, si avrà, tenuto conto del valore maggiorante Mr^n di c_n,

(3) $$M_1 < \frac{2M}{qr^{m-2}}.$$

In base a questa disuguaglianza, una serie

(4) $$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n S^n f$$

risulta assolutamente ed uniformemente convergente per ogni $|x| \geq r$, e per ogni sistema di coefficienti k_n paragonabile assintoticamente ad una progressione geometrica ed anche ad una progressione ultrageometrica a^{b^n} con a e b maggiori dell'unità e $b < m - 1$. Ciò consegue subito dalla (3) applicata ad $S^n f$ invece che ad f e dalla (4′) della Nota I. E poichè, comunque preso x in Ω, si può determinare un $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$, sia $|x_n| > R$, così la convergenza della (4) ha luogo in tutto Ω; la $g(x)$ appartiene essa pure ad $(\mathfrak{J})$.

4. Scegliendo le k_n in modo da soddisfare a relazioni ricorrenti, la (4) darà soluzione di corrispondenti equazioni funzionali. Il caso più semplice si ha assumendo le k_n come termini k^n di una progressione geometrica; la

(5) $$g(x) = \sum_{0}^{\infty} k^n S^n f$$

soddisfa all'equazione

(6) $$g(x) - k\, S\, g(x) = f(x),$$

e, poichè la (5) è funzione intera in k, la (6) appartiene al tipo Volterra, in guisa che l'equazione omogenea

(7) $$g(x) - kg(\alpha(x)) = 0$$

non ammette soluzione nello spazio funzionale $(\mathfrak{J})$: l'impossibilità della (7) in questo spazio è, del resto, resa manifesta dalla (3).

5. *a*) Si consideri il quoziente

$$\frac{x^m}{\alpha(x)} = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}}, \tag{8}$$

indi si prenda $|x| \geq r$, con r abbastanza grande:

1°) da superare il numero R definito ad I, 4;

2°) da rendere convergente lo sviluppo di (8) in serie di potenze di $\frac{1}{x}$, che si può scrivere

$$\frac{x^m}{\alpha(x)} = 1 + \beta(x),$$

dove $\beta(x)$ è elemento di $(\mathfrak{I})$, poichè $\alpha(x)$ appartiene al caso A;

3°) da rendere il massimo valore assoluto M di $\beta(x)$ inferiore alla unità.

Formando allora

$$(1 + \beta(x))^{1/m}, \tag{9}$$

questa è pure sviluppabile in serie di potenze di $1:x$, per $|x| > r$, ed è un ramo ad un valore di funzione analitica entro tutto Ω, se si fissa che, per $x = \infty$, essa abbia il valore 1: infatti, per ogni curva chiusa descritta da x in Ω, essendo i punti di diramazione della (9) tutti fuori di Ω, essa riprende il medesimo valore. Ponendo

$$(1 + \beta(x))^{1/m} = 1 + \gamma_1(x),$$

anche $\gamma_1(x)$ è elemento di $(\mathfrak{I})$.

b) È facile vedere che essendo il massimo valore assoluto M di $\beta(x)$, per $|x| > r$, inferiore all'unità, il massimo valore assoluto M_1 di $\gamma_1(x)$ è non maggiore di M. Ma, essendo $\gamma_1(x)$ elemento di $(\mathfrak{I})$, il massimo valore assoluto di $S\gamma_1(x)$ sarà (n. 3) inferiore a

$$\frac{2M_1}{q^{r^{m-2}}}, \tag{10}$$

e quindi, posto

$$(1 + S\gamma_1(x))^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\alpha^m(x)}{\alpha_2(x)}\right)^{\frac{1}{m^2}} = 1 + \gamma_2(x),$$

anche il massimo valore assoluto M_2 di $\gamma_2(x)$ sarà inferiore a (10). Così continuando, posto

$$\left(\frac{\alpha_{n-1}^m(x)}{\alpha_n(x)}\right)^{\frac{1}{m^n}} = 1 + \gamma_n(x),$$

il massimo valore assoluto M_n di $\gamma_n(x)$ è legato a quello M_{n-1} di $\gamma_{n-1}(x)$ da

$$M_n < \frac{2M_{n-1}}{q r_{n-1}^{m-2}}. \tag{11}$$

6. Si consideri ora il prodotto infinito

$$\omega(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{n-1}^m(x)}{\alpha_n(x)} \right)^{\frac{1}{m^n}} = \frac{1}{x} \prod_1^{\infty} (1 + \gamma_n(x)). \tag{12}$$

La serie $\Sigma\gamma_n(x)$, avendo per maggiorante la ΣM_n, per la quale valgono le (11), è assolutamente ed uniformemente convergente per $|x| > r$; lo stesso è dunque, nel medesimo campo, del prodotto infinito $\omega(x)$, che vi rappresenta di conseguenza un ramo ad un valore e regolare di funzione analitica. Ma il prodotto (12) si può scrivere

$$\frac{1}{x} \prod_1^{p-1} \prod_p^{\infty}:$$

ora, presa un'area $\mathfrak{A}$ finita e tutta interna ad Ω, si può (I, 3) prendere β abbastanza grande perchè, per ogni x di $\mathfrak{A}$ ed ogni $n \geq p$, sia $|x_n| > r$, r essendo definito al n. 5, a). Ne viene che il prodotto $\prod_p^{\infty}$ è, per tutta l'area $\mathfrak{A}$, nelle condizioni di convergenza assoluta ed uniforme già considerate, e quindi lo stesso è di $\omega(x)$. Quindi la $\omega(x)$ è ramo di funzione analitica regolare entro tutto Ω, e ad un valore, per essere fuori di Ω i punti di diramazione dei fattori di $\omega(x)$, cioè le radici delle $\alpha_n(x)$.

7. La $\omega(x)$ può anche porsi sotto la forma

$$\omega(x) = \frac{1}{\alpha_p^{m^p}(x)} \left(\frac{\alpha_p^m(x)}{\alpha_{p+1}(x)} \right)^{\frac{1}{m^{p+1}}} \left(\frac{\alpha_{p+1}^m(x)}{\alpha_{p+2}(x)} \right)^{\frac{1}{m^{p+2}}} \cdots, \tag{13}$$

onde segue che la $\omega(x)$ soddisfa all'equazione funzionale

$$\omega(\alpha(x)) = \omega^m(x). \tag{14}$$

Da questa,

$$\log \omega(\alpha(x)) = m \log \omega(x): \tag{15}$$

quindi l'equazione (7), che non può essere soddisfatta nello spazio funzionale $(\mathfrak{J})$, diviene possibile mediante l'aggiunzione di $\log x$ a questo spazio.

8. La funzione $\omega(x)$, di cui si è stabilita l'esistenza e la regolarità nel campo Ω, che è nulla per $x = \infty$ ed appartiene di conseguenza ad $(\mathfrak{J})$, gode delle seguenti proprietà:

a) È $|\omega(x)| < 1$ entro tutto Ω. Infatti, posto $\omega(x) = u$, si ha, per la (14),

$$\omega(x_1) = u^m, \ldots \omega(x_n) = u^{m^n} \ldots;$$

ma le x_n tendono all'infinito, ed $\omega(x_n)$ in corrispondenza tende a zero; onde è $|u| < 1$.

b) La $\omega(x)$ non si annulla in Ω, se non per $x = \infty$. Se infatti per $x = \bar{x}$ fosse $\omega(\bar{x}) = 0$, ne verrebbe, per la (14), $\omega(\bar{x}_n) = 0$, e quindi $x = \infty$ sarebbe punto limite di radici di ω, contro il fatto che ω è regolare per $x = \infty$.

c) La $\omega(x)$ non riprende uno stesso valore in due punti di Ω. Essendo ω regolare e nulla di prim'ordine per $x = \infty$, si può determinare un r tale che, per $|x| > r$, $\omega(x)$ non prenda due volte uno stesso valore. Ma allora per due punti x, y di Ω non può essere $\omega(x) = \omega(y)$, poichè ne verrebbe $\omega(x_n) = \omega(y_n)$, dove n si può fare abbastanza grande per rendere $|x_n| > r$, $|y_n| > r$.

d) Sia x un punto di Ω, $x'_{11}, x'_{12}, \ldots x'_{1m}$ i suoi primi antecedenti; sia $\omega(x) = u$. Le $\omega(x'_{1j})$ saranno, per la (14), altrettante radici m^{sime} di u, e, per $j = 1, 2, \ldots m$, daranno tutte le radici m^{sime}, in seguito a *c*). Se ora

$$x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \ldots \tag{16}$$

è una successione qualunque di successivi antecedenti di x, i moduli della successione

$$\omega(x'_1), \omega(x'_2), \ldots \omega(x'_n), \ldots \tag{17}$$

tenderanno all'unità. In particolare, si può scegliere x'_n in modo che $\omega(x'_n)$ abbia per argomento $\dfrac{2\pi}{m^n}$; le (17) tendono allora all'unità.

e) Qualunque sia il numero $\bar{u}$ di modulo minore d'uno, l'equazione $\omega(x) = \bar{u}$ ammette in Ω una radice. Infatti, per essere $x = \infty$ uno zero di prim'ordine per $\omega(x)$, si può determinare un numero positivo ϱ tale che, per $|u| < \varrho$, si possa, dalla $\omega(x) = u$, ricavare

$$\frac{1}{x} = u + g_2 u^2 + g_3 u^3 + \cdots; \tag{18}$$

e se è $|\bar{u}| < \varrho$, questa dà il valore richiesto per x. Se è invece $1 > |\bar{u}| > \varrho$, si può sempre determinare l'intero p in modo che sia $|\bar{u}^{m^p}| < \varrho$; determinato $\bar{x}$ tale che $\omega(\bar{x}) = \bar{u}^{m^p}$, uno degli antecedenti p^{simi} di $\bar{x}$ sarà radice di $\omega(x) = \bar{u}$. Questa radice, per *c*), è unica.

9. Ponendo

$$\omega(x) = u, \quad \text{o, invertendo,} \quad x = \xi(u), \tag{19}$$

si stabilisce una rappresentazione conforme del campo Ω del piano x sul cerchio $|u|<1$ del piano u. Questa corrispondenza è biunivoca (8, c); al centro del cerchio corrisponde il punto $x=\infty$. Alla sostituzione $\mathrm{S}x=\alpha(x)$ corrisponde in u la trasformazione $\mathrm{T}u=u^m$. Alle circonferenze $|u|=c$, $0<c<1$, corrispondono in Ω le curve equimodulari

$$|\omega(x)|=c\,; \tag{20}$$

queste, al tendere di c all'unità, tendono al contorno $\boldsymbol{\Gamma}$ di Ω.

La trasformazione T genera il gruppo continuo ad un parametro

$$\mathrm{T}^\nu u=u^{m^\nu}$$

(ν reale qualunque) di cui le circonferenze $|u|=c$ ed i raggi arg. $u=c$ costituiscono sistemi di imprimitività; le traiettorie sono spirali logaritmiche di polo 0. La trasformata S di T mediante $\omega(x)$ dà il gruppo $\mathrm{S}^\nu(x)=\alpha_\nu(x)$, che definisce l'iterata di $\alpha(x)$ di indice reale qualsivoglia ν; l'espressione analitica di questa iterata è

$$\alpha_\nu(x)=\xi\big(\omega^{m^\nu}(x)\big)\,. \tag{21}$$

Le curve (20) costituiscono, per il gruppo S^ν, un sistema di imprimitività, e così le curve arg. $\omega(x)=\text{cost}$. Le traiettorie del gruppo S^ν sono le trasformate, mediante le (19), delle spirali logaritmiche di polo $u=0$ del piano u.

10. La funzione ξ, inversa di ω, è definita dalla equazione funzionale

$$\alpha(\xi(u))=\xi(u^m) \tag{22}$$

e dalla condizione di avere un polo di prim'ordine per $u=0$. Posto dunque

$$\xi(u)=\frac{1}{u}+g_0+g_1u+\cdots,$$

si può, da (22), determinare i coefficienti $g_0, g_1, \ldots$

Se ora ciò si applica all'esempio particolare $\alpha(x)=x^2-2$, si trova, con calcolo assai facile,

$$g_0=g_2=g_3=\cdots=0\,,\quad g_1=1\,,$$

onde

$$\xi(u)=u+\frac{1}{u}\,.$$

Da ciò il carattere elementare dell'iterazione di indice qualunque di x^2-2, carattere che è posto in rilievo nella Nota comparsa in questi Rendiconti della seduta del 4 aprile 1920.