ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

gena, risulta chiaro dall'aver posto questo giacimento tra quelli di *tipo alpino*, i quali, secondo il suo modo di vedere, « stets nur Mineralien enthalten, deren chemischer Bestand durch Lateralsekretion aus dem Nachbargestein entnommen ist ».

Per ciò che si riferisce ai minerali nella dolomia del Passo Cadonighino, mi pare che questo modo di giudicare possa forse definirsi troppo assoluto ed esclusivo; e non posso che associarmi a quanto, molto sommariamente ma chiaramenfe, ne dice il Groth, il quale pure dell'opera diligente del Koenigsberger mostra di fare grande apprezzamento. Il geniale mineralogo di Monaco, dopo aver parlato appunto dei minerali della dolomia di Campolongo, dice, come per incidenza, « betreffs dieser, jedenfalls unter Mitwirkung von Pneumatolyse entstandenen Lagerstätten, sei, ecc. ecc. » (1). La frequenza della tormalina era già molto espressiva a questo proposito; ma non priva di significato mi pare che possa ritenersi anche la constatazione della presenza del crisoberillo, sia pure in minima quantità: una tra la caratteristiche dell'opera dei mineralizzatori è appunto quella di concentrare in cristalli le tracce anche infinitesime di elementi rari da essi trasportate.

Matematica. — *Di alcune varietà abeliane.* Nota II di GIUSEPPE MARLETTA, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO (*).

10. Esaminiamo l'ipotesi $p = 5$ (23), e quindi (n. 9) $r = 11$. Indicando con μ una radice primitiva 11^{esima} dell'unità, che sia inoltre uno dei cinque moltiplicatori della trasformazione T, le radici primitive 11^{esime} dell'unità sono

$$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^8\ ,\ \mu^9\ ,\ \mu^{10}\ .$$

I moltiplicatori di T saranno dunque (n. 2)

1°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^5$	9°)	$\mu\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^9$
2°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^6$	10°)	$\mu\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^9$
3°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^7$	11°)	$\mu\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^9$
4°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^7$	12°)	$\mu\ ,\ \mu^3\ ,\ \mu^6\ .\ \mu^7\ ,\ \mu^9$
5°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^8$	13°)	$\mu\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^8\ ,\ \mu^9$
6°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^8$	14°)	$\mu\ ,\ \mu^4\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^8\ ,\ \mu^9$
7°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^8$	15°)	$\mu\ ,\ \mu^5\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^8\ ,\ \mu^9$
8°)	$\mu\ ,\ \mu^2\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^8$	16°)	$\mu\ ,\ \mu^6\ ,\ \mu^7\ ,\ \mu^8\ ,\ \mu^9\ .$

(1) P. Groth, *Topographische Uebersicht der Minerallagerstätten.*, Verbesserter Sonderabdruck aus der Zeitschrift für praktische Geologie, 1916-17, pag. 15.

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1920.

(23) L'ipotesi $p = 3$ è stata studiata; cfr. Raciti, loc. cit. in (4).

Se la trasformazione T ha i moltiplicatori del caso 4°, la T^2 ha (a prescindere dall'ordine) quelli del caso 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 5°, la T^3 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 6°, la T^6 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 7°, la T^7 ha quelli del 3°; se T ha i moltiplica tori del caso 8°, la T^2 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 10°, la T^4 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 11°, la T^5 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 12°, la T^4 ha quelli del 2°; se T ha i moltiplicatori del caso 13°, la T^3 ha quelli del 1°; se T ha i moltiplicatori del caso 14°, la T^3 ha quelli del 3°; se T ha i moltip licatori del caso 15°, la T^5 ha quelli del 3°; se infine T ha i moltiplicatori del caso 16°, la T^2 ha quelli del 3°.

Si può dunque affermare che

per $p = 5$ la varietà Γ possiede una trasformazione birazionale periodica coi moltiplicatori

$$\mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4,\ \mu^5, \quad \text{ovvero}$$
$$\mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^4,\ \mu^6, \quad \text{"}$$
$$\mu,\ \mu^2,\ \mu^3,\ \mu^5,\ \mu^7, \quad \text{"}$$
$$\mu,\ \mu^3,\ \mu^4,\ \mu^5,\ \mu^9.$$

11. Concludiamo dunque (n. 3) che

se una varietà abeliana a 5 dimensioni ammette una trasformazione birazionale periodica in se stessa, rappresentata da una sostituzione lineare i cui moltiplicatori siano cinque radici dell'unità distinte e tutte appartenenti ad uno stesso esponente, allora essa varietà appartiene ad una matrice riemanniana isomorfa ad una delle seguenti quattro matrici, nelle quali μ è una radice primitiva 11^{esima} dell'unità:

A)
$$\begin{Vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\ 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^4 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \end{Vmatrix}$$

B)
$$\begin{Vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\ 1 & \mu^6 & \mu & \mu^7 & \mu^2 & \mu^8 & \mu^3 & \mu^9 & \mu^4 & \mu^{10} \end{Vmatrix}$$

$$C)\quad \begin{Vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \mu^6 & \mu^8 & \mu^{10} & \mu & \mu^3 & \mu^5 & \mu^7 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^4 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \\ 1 & \mu^7 & \mu^3 & \mu^{10} & \mu^6 & \mu^2 & \mu^9 & \mu^5 & \mu & \mu^8 \end{Vmatrix}$$

$$D)\quad \begin{Vmatrix} 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & \mu^5 & \mu^6 & \mu^7 & \mu^8 & \mu^9 \\ 1 & \mu^3 & \mu^6 & \mu^9 & \mu & \mu^4 & \mu^7 & \mu^{10} & \mu^2 & \mu^5 \\ 1 & \mu^4 & \mu^8 & \mu & \mu^5 & \mu^9 & \mu^2 & \mu^6 & \mu^{10} & \mu^3 \\ 1 & \mu^5 & \mu^{10} & \mu^4 & \mu^9 & \mu^3 & \mu^8 & \mu^2 & \mu^7 & \mu \\ 1 & \mu^9 & \mu^7 & \mu^5 & \mu^3 & \mu & \mu^{10} & \mu^8 & \mu^6 & \mu^4 \end{Vmatrix}$$

12. Consideriamo la matrice D).

Sommando agli elementi della prima orizzontale i corrispondenti delle altre, e posto $\mu+\mu^3+\mu^4+\mu^5+\mu^9=\nu$ e $\mu^2+\mu^6+\mu^7+\mu^8+\mu^{10}=\nu'$, si ottiene la seguente matrice isomorfa alla D):

$$\begin{Vmatrix} 5 & \nu & \nu' & \nu & \nu & \nu & \nu' & \nu' & \nu' & \nu \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \end{Vmatrix}$$

Ma è $\nu+\nu'+1=0$, quindi, operando per addizione e sottrazione sulle verticali, si riconosce subito che la matrice D) è isomorfa alla matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \nu \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \\ . & . & . & . & . & & & & & \end{Vmatrix}$$

Ne segue senz'altro che *la matrice* D) *è impura*, e ad assi puri ellittici come già si avvertì nel n. 6.

13. Consideriamo ora la matrice A) del n. 11, e ammettiamo che essa sia impura e quindi (n. 6) ad indici, di singolarità e di moltiplicabilità, massimi.

Gli spazî, a quattro dimensioni, τ e $\bar{\tau}$ imagini della detta matrice si possono [24] dunque considerare come gli spazî fondamentali di un'omografia razionale biassiale Ω. L'equazione caratteristica di questa omografia ha quindi due sole radici distinte (imaginarie) ξ e ξ', le quali sono anche radici del-

[24] Scorza, loc. cit. in [1], parte I, n. 60.

l'equazione minima. Questa, giacchè Ω è generale, è ([25]) di secondo grado; possiamo dunque affermare che ξ e ξ' sono radici di un'equazione quadratica a coefficienti interi. Ne risulta che le coordinate non omogenee di τ sono numeri della forma $g + l\xi$ con g ed l razionali. Ma siccome gli elementi di una stessa orizzontale della matrice A) sono le coordinate omogenee di un punto di τ, così dividendo per il determinante costituito dalle prime cinque verticali, quello che si ottiene sostituendo, in questo, agli elementi della quinta verticale quelli della sesta, si otterrà una coordinata non omogenea di τ; ma il quoto ora detto è ([26]) la somma degli elementi della seconda verticale, quindi indicando con s e t numeri razionali possiamo scrivere

$$\mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 + \mu^5 = s + t\xi\,,$$

e di conseguenza

$$\mu^{10} + \mu^9 + \mu^8 + \mu^7 + \mu^6 = s + t\xi'\,;$$

ne seguirebbe che il prodotto dei primi membri dovrebbe essere un numero razionale, perchè tale è il prodotto dei secondi membri, cioè dovrebbe essere

$$4\mu^{10} + 3\mu^9 + 2\mu^8 + \mu^7 + \mu^4 + 2\mu^3 + 3\mu^2 + 4\mu + 5 = \mathrm{R}\,,$$

indicando con R un numero razionale; e, infine, tenendo conto della

$$(1)\qquad \mu^{10} + \mu^9 + \mu^8 + \mu^7 + \mu^6 + \mu^5 + \mu^4 + \mu^3 + \mu^2 + \mu + 1 = 0\,,$$

dovrebbe essere

$$\mu^9 + 2\mu^8 + 3\mu^7 + 4\mu^6 + 4\mu^5 + 3\mu^4 + 2\mu^3 + \mu^2 + (\mathrm{R} - 1) = 0\,,$$

ciò che è assurdo, perchè questa eguaglianza, qualora si consideri μ come incognita, non è un'identità, mentre d'altra parte la (1) è un'equazione irriducibile nel corpo dei numeri razionali.

Possiamo dunque affermare che la matrice A) è pura; e siccome col medesimo procedimento si perviene allo stesso risultato anche per le matrici B) e C), così possiamo concludere che

le matrici riemanniane A), B), C) *sono pure* ([27]).

([25]) Loc. cit. in ([12]).

([26]) Cfr. p. es. E. Pascal, *I determinanti* [Hoepli, Milano, 1897], pp. 171 e 172.

([27]) Mediante considerazioni analoghe a quelle tenute in questo numero, si può dimostrare che sono *pure* le due seguenti matrici riemanniane:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \alpha^6 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha \end{matrix} \right\| \quad \text{e} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^3 & \omega^7 & \omega^2 \end{matrix} \right\|,$$

ove α e ω sono radici primitive dell'unità rispettivamente settima e nona; risultato a cui pervenne, per via completamente diversa, la Raciti nel loc. cit. in ([4]), n. 6.