ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale.* Nota II di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. Bagnera [1].

4. Tutto quanto abbiamo esposto prelude alle proprietà delle soluzioni $u(x)$ dell'equazione integrale

$$(7)\quad u(x)=\lambda\left[g(x)\,u(\alpha x)+\int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\,u(s)\,ds+\int_0^{\alpha x}\mathrm{P}(x\,,s)\,u(s)\,ds\right]+f(x),$$

limitandoci per ora a supporre $|\alpha|<1$.

Per $\mathrm{P}(x\,,s)\equiv 0$ si ha l'equazione

$$u(x)=\lambda\left[g(x)\,u(\alpha x)+\int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\,u(s)\,ds\right]+f(x)$$

che richiama quella studiata dal Picard [2], e cioè

$$u(x)=g(x)\,u(\alpha x)+\lambda\int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\,u(s)\,ds+f(x)$$

e ne differisce soltanto per la posizione del parametro λ.

Ma a questo proposito (senza che per il momento io abbia potuto approfondire l'essenza del fatto) ho potuto constatare nel presente ordine di ricerche ed in quelle da me fatte sulle equazioni integrali del tipo

$$(8)\qquad \varphi(x)=\lambda\left[k(x)\,\varphi(x)+\int_a^b \mathrm{K}(x\,,s)\,\varphi(s)\,ds\right]+f(x)\,,$$

che quando si tratta d'introdurre un parametro λ in una equazione funzionale

$$\varphi=\mathrm{S}[\varphi]+\mathrm{T}[\varphi]+f,$$

che dipende da due operazioni lineari S e T, conviene di mettere il parametro λ a fattore in entrambe le operazioni S e T invece che a fattore di una sola di esse, perchè allora riesce più semplice lo studio della soluzione come funzione di λ.

È così che nei miei lavori precedenti ho potuto dire di più sopra la soluzione dell'equazione (8) di quanto si è potuto dire sull'equazione di terza specie di Hilbert, che è del tipo

$$k(x)\,\varphi(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x\,,s)\,\varphi(s)\,ds+f(x)\,.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1920.

(2) Picard, *Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de certaines équations aux dérivées partielles* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIV (1er semestre 1907), pp. 1009-1012].

Nello studio della sua equazione il Picard suppone $g(0)=1$, il che porta, per la funzione data $f(x)$, la limitazione $f(0)=0$; e, così facendo, lascia fuori il caso normale dell'unicità della soluzione in corrispondenza ad un'arbitraria $f(x)$. Difatti il Picard, per fissare una soluzione, dà ad arbitrio il valore della u per $x=0$ e dimostra che allora la soluzione è funzione intera del parametro λ.

Osserviamo poi che la forma (7), da noi adottata, è tale che quando si fissa λ e si deriva rispetto ad x, si ottiene una equazione che può essere ricondotta allo stesso tipo (7), il che non avviene per la forma adottata dal Picard.

Aggiungiamo ancora che la (7), con $\lambda=1$, nell'ipotesi che sia $|g(x)|<1$, è compresa in un tipo più generale di equazioni funzionali studiato dal Picone ([1]).

5. Mostrerò in altra Nota che, almeno sotto certe condizioni di derivabilità delle funzioni che vi figurano, l'equazione (7) ha una soluzione unica che *è funzione intera di* λ *se* $g(0)=0$; *e se è* $g(0)\neq 0$, *la soluzione è funzione meromorfa di* λ *che ammette come poli semplici i punti*

$$\lambda_n=\frac{1}{\alpha^n\, g(0)} \qquad (n=0\,,1\,,2\,,\ldots).$$

Uno o più di questi poli possono mancare se i valori della $f(x)$ e delle sue derivate, calcolati per $x=0$, soddisfano ad alcune relazioni lineari omogenee che in appresso scriveremo.

In corrispondenza al valore λ_n *c'è una funzione* $u_n(x)$, *determinata a meno di una costante moltiplicativa, che soddisfa all'equazione omogenea*

$$u_n(x)=\lambda_n\left[g(x)\,u_n(\alpha x)+\int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\,u_n(s)\,ds+\int_0^{\alpha x}\mathrm{P}(x\,,s)\,u_n(s)\,ds\right].$$

Si hanno così le *funzioni fondamentali* $u_n(x)$ dell'equazione (7) e le corrispondenti *costanti caratteristiche* λ_n.

Qui si pone il problema della rappresentazione di una assegnata funzione in serie di funzioni fondamentali, serie che sono più da assimilarsi a generalizzazioni di serie di potenze anzichè a generalizzazioni di serie di Fourier, come sarebbero gli sviluppi in serie di funzioni fondamentali di un'equazione di Fredholm. Ed anche qui se $h(x)$ si rappresenta in serie di funzioni fondamentali, l'operazione funzionale

$$g(x)\,h(\alpha x)+\int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\,h(s)\,ds+\int_0^{\alpha x}\mathrm{P}(x\,,s)\,h(s)\,ds$$

([1]) Picone, *Sopra un problema dei valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXXI (1° semestre 1911), pp. 133-169].

eseguita su $h(x)$ equivale a dividere i varî termini della serie per le corrispondenti costanti caratteristiche.

Per esempio, se si fa $g(x) \equiv 1$, $N(x, s) \equiv 1$, $P(x, s) \equiv 0$, si ha l'equazione

$$(9) \qquad u(x) = \lambda \left[u(\alpha x) + \int_0^x u(s)\, ds \right] + f(x).$$

In questo caso, come si vedrà in seguito, la funzione fondamentale $u_0(x)$, corrispondente al valore caratteristico $\lambda_0 = 1$, è data da

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}.$$

Si trova poi facilmente l'espressione di $u_n(x)$ tenendo conto che questa (come del resto nel caso generale) ha per $x = 0$ uno zero di ordine n e tenendo conto della relazione ricorrente

$$u'_n(x) = u_{n-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

6. Dalla (9), prendendo per $f(x)$ una costante, si ottiene, derivando,

$$(10) \qquad u'_n(x) = \lambda[\alpha u'(\alpha x) + u(x)]$$

che si può considerare come una equazione differenziale lineare omogenea del prim'ordine generalizzata.

Per ogni valore di λ *diverso* da $\frac{1}{\alpha^n}$ $(n \geq 1)$ questa equazione ammette una sola soluzione che prende un valore fissato per $x = 0$. In particolare, è nulla identicamente la soluzione che si annulla per $x = 0$.

Invece l'equazione (10), per il valore eccezionale $\lambda = \frac{1}{\alpha^n}$, ammette una soluzione non identicamente nulla, ma che si annulla per $x = 0$. Anche quando λ non è un valore eccezionale, tutte le soluzioni della (10) si ottengono moltiplicando una di esse per una costante arbitraria.

Risultati di indole più generale otterremo dallo studio delle soluzioni $u(x)$ di equazioni del tipo

$$\Phi[x, u(x), u(\alpha x), u'(x), u'(\alpha x), \dots, u^{(n)}(x), u^n(\alpha x)] = 0.$$

Se il primo membro contiene linearmente la u e le sue derivate calcolate in x ed in αx, faremo vedere che la risoluzione di una tale equazione si riconduce alla risoluzione di una equazione del tipo (7).