ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVII.

1920

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1920

Matematica. — *Nuove ricerche di geometria proiettivo-differenziale.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

In una Memoria (*Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*), pubblicata nei « Rend. del Circ. mat. di Palermo » (vol. 43), ho studiato il problema di caratterizzare proiettivamente le ipersuperficie V_n di uno spazio lineare S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni. Si possono estendere i metodi svolti in tale Memoria, e negli altri lavori ivi citati, alle V_r di S_n per $2 \leq r < n$.

Tra i varii modi di compiere siffatta estensione [2] io qui ne voglio esporre specialmente uno, e dare un rapido cenno di un secondo metodo. Il primo di essi, anzichè ricorrere a forme differenziali del primo ordine, si fonda sulla considerazione di sistemi di tali forme: da esso anzi sorge il problema, che non sembra difficile, di riconoscere la trasformabilità, l'uno nell'altro, di due tali sistemi di forme.

Consideriamo $r+2$ combinazioni lineari indipendenti delle $n+2$ coordinate omogenee $x, y, .., w$ in S_{n+1}:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = a_{11}\,x + a_{12}\,y + \cdots + a_{1,n+2}\,w \\ \eta = a_{21}\,x + a_{22}\,y + \cdots + a_{2,n+2}\,w \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta = a_{r+2,1}\,x + a_{r+2,2}\,y + \cdots + a_{r+2,n+2}\,w \end{array}\right\} \quad (a_{ij} = \text{cost.})\,.$$

Si costruisca la forma quadratica

$$(1) \qquad \sigma = (\xi\,, \xi_1\,, \xi_2\,, .., \xi_r\,, d^2\xi) \qquad \left(\xi_i = \frac{\partial\xi}{\partial u_i}\;;\; i = 1\,, 2\,, ..., r\right).$$

Con questa notazione indico il determinante, la cui prima riga è formata da ξ, dalle sue derivate rispetto alle coordinate curvilinee $u_1, u_2, ..., u_r$ su V_r, e da $d^2\xi$; e le cui altre $r+1$ righe si deducono dalla prima, sostituendo alla ξ ordinatamente le $\eta, ..., \zeta$. Sia $\Delta(\sigma)$ il discriminante di σ. Sostituiamo alle $u_1, ..., u_r$ loro r funzioni indipendenti $u'_1, u'_2, ..., u'_r$; e sia $\bar{\sigma}$ la forma dedotta da σ sostituendo alle u i loro valori espressi in fun-

[1] Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1920.

[2] Si potrebbe cercare di estendere alle V_r la definizione, data da me per le ipersuperficie e i complessi, di varietà proiettivamente applicabili; oppure studiare in un punto di V_r le intersezioni di V_r con gli iperpiani, le quadriche, ecc., che ivi hanno con V_r il contatto più intimo possibile; oppure studiare l'equazione delle sezioni iperpiane di V_r, oppure infine studiare la varietà degli ∞^n iperpiani tangenti alla V_r.

Tutti questi metodi hanno intimi legami con quelli esposti nel testo.

zione delle u'; la $\bar{\sigma}$, pensata come forma quadratica nei du', avrà il discriminante

(2) $$\Delta(\bar{\sigma}) = \Delta(\sigma)\left[\frac{d(u)}{d(u')}\right]^2,$$

ove con $\frac{d(u)}{d(u')}$ si indica lo jacobiano delle u rispetto alle u'.

D'altra parte, posto $\xi'_i = \frac{\partial \xi}{\partial u'}$, e indicando [per analogia con (1)] con σ' la forma (quadratica nei du')

(3) $$\sigma' = (\xi\,, \xi'_1\,, \xi'_2\,, \dots\,, \xi'_r\,, d^2\xi)\,,$$

sarà

(4) $$\sigma' = \bar{\sigma}\,\frac{d(u)}{d(u')} = \sigma\,\frac{d(u)}{d(u')}\,;$$

cosicchè, per il suo discriminante $\Delta(\sigma')$, varrà, in virtù di (2), la

(5) $$\Delta(\sigma') = \Delta(\sigma)\left[\frac{d(u)}{d(u')}\right]^{r+2}.$$

Perciò, in virtù delle (4) e (5), sarà

$$\frac{\sigma'}{\sqrt[r+2]{\Delta(\sigma')}} = \frac{\sigma}{\sqrt[r+2]{\Delta(\sigma)}}.$$

Cioè la forma

(6) $$\mathrm{F} = \frac{\sigma}{\sqrt[r+2]{\Delta(\sigma)}}$$

ha significato intrinseco (indipendente dalla scelta delle coordinate curvilinee u). Evidentemente il suo discriminante $\Delta(\mathrm{F}_2)$ è dato dalla

$$\Delta(\mathrm{F}_2) = \frac{\Delta(\sigma)}{\sqrt[r+2]{\Delta(\sigma)}^{\,r}} = \sqrt[r+2]{\Delta(\sigma)}^{\,2}$$

cosicchè la (6) si può scrivere anche (analogamente a quanto è fatto in loc. cit., ser. $r = n$)

(6)$_{bis}$ $$\mathrm{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\mathrm{F}_2)}}\,\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta(\mathrm{F}_2)}}\,(\xi\,, \xi_1\,, \xi_2\,, \dots\,, \xi_r\,, d^2\xi)\,.$$

Definita così la F_2, si può definire F_3 come nel loc. cit., sviluppando poi in modo perfettamente analogo la teoria.

La differenza essenziale sta in ciò: che, mentre per le superficie di S_3 o ipersuperficie di S_{n+1} le forme F_2, F_3 sono determinate a meno di uno stesso fattore, qui invece, al variare delle a_{ij}, le F_2, F_3 descrivono due sistemi di forme. Per es., la forma F_2 si può scrivere sotto forma di prodotto simbolico, nel modo seguente $\left(\text{quando si ponga } x_s = \frac{\partial x}{\partial u_s}, \text{ ecc.}\right)$:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(F_2)}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1,n+2} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2,n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r+2,1} & a_{r+2,2} \ldots & a_{r+2,n+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \ldots\ldots & w \\ x_1 & y_1 \ldots\ldots & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & y_r \ldots\ldots & w_r \\ d^2x & d^2y \ldots & d^2w \end{vmatrix}$$

ed è perciò una combinazione lineare degli $\binom{n+2}{r+2}$ minori di ordine massimo della seconda matrice, i cui coefficienti sono (a meno del fattore comune $\frac{1}{\sqrt{\Delta(F_2)}}$) le coordinate di uno spazio lineare ad $n-r-1$ dimensioni e precisamente di quello spazio lineare, che è intersezione degli $r+2$ iperpiani di equazione

$$a_{i1}x + a_{i2}y + \cdots + a_{i,n+2}w = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+2).$$

Osservazione. Ad un risultato affatto equivalente giungeremmo sostituendo alla V_r la ipersuperficie generata dal punto di coordinate

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x + b_{11} \;\; u_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r} \;\; u_n \\ \bar{y} &= y + b_{21} \;\; u_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r} \;\; u_n \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \bar{w} &= w + b_{n+2,1}\, u_{r+1} + \cdots + b_{n+2,n-r}\, u_n , \end{aligned}\right\} \quad (b_{ij} = \text{cost.})$$

che è luogo di spazî lineari. Troveremmo

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta(F_2)}} (x, x_1, x_2, \ldots, x_r, b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n-r}, d^2x)$$

ove la quantità tra parentesi indica il determinante, di cui gli elementi ivi scritti costituiscono la prima riga, e da cui le altre righe si deducono sostituendo ordinatamente alla x le $y, \ldots, w$ ed alle b_{1i} le $b_{2i}, \ldots b_{n+2,i}$. Le b si potrebbero considerare come coordinate di $n-r$ punti scelti genericamente nello spazio lineare determinato dai precedenti $r+2$ iperpiani.

Osservazione. Sostanzialmente lo studio da noi fatto equivale a sostituire alla V_r l'insieme delle sue proiezioni ottenute proiettando V_r da un S_{n-r+1} sopra un S_{r+1}.

Sorge spontanea la domanda: Si può evitare di ricorrere a sistemi di forme, e usare soltanto un numero ben determinato di forme, che non contengano parametri arbitrarî, salvo al più un fattore? Per rispondere a questa domanda, consideriamo dei determinanti di ordine $n+2$, di cui la prima riga è formata dalla x, da sue derivate o differenziali, e le altre righe se ne ottengono sostituendo alla x ordinatamente le $y, \dots, w$. Indicheremo nel seguito un tale determinante, dando gli elementi della sua prima riga. Consideriamo ora un determinante, la cui prima colonna abbia per elementi le $x, y, \dots, w$, altre colonne successive abbiano per elementi tutte le loro derivate parziali fino a quelle di un certo ordine k (dove k è un intero da determinare), ed altre colonne abbiano per elementi differenziali della x o delle sue precedenti derivate: con l'avvertenza che, se una colonna ha per elementi certi differenziali di una derivata di ordine h, vi siano altre colonne che hanno per elementi i differenziali di ogni altra derivata di ordine h. Riuscirò più chiaro, dando un esempio per il caso $r=2$, in cui i primi determinanti da studiare sarebbero i seguenti:

$$(x, x_1, x_2, d^2x) \qquad (\text{se } n=2)$$
$$(x, x_1, x_2, dx_1, dx_2) \qquad (\text{se } n=3)$$
$$(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}) \qquad (\text{se } n=4)$$
$$(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}, d^3x) \qquad (\text{se } n=5)$$
$$(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}, d^2x_1, d^2x_2) \qquad (\text{se } n=6)$$

ecc.

ove gli indici 1,2 indicano derivazioni rispetto u_1, u_2.

Tutti questi determinanti restano moltiplicati per ϱ^{n+2}, se si moltiplicano le coordinate omogenee per ϱ; e, indicando con J lo jacobiano di un cambiamento di variabili, restano moltiplicati per una potenza di J (negli esempî precedenti per J, J^2, J^3, J^4, J^5) quando si effettui tale cambiamento.

Si potrebbe, come nella Mem. cit. pel caso $n=3$, moltiplicare le precedenti espressioni per un fattore tale che esse abbiano significato intrinseco, cioè restino inalterate per un cambiamento di variabili coordinate u. Esse [tranne nel caso $n=4$, in cui all'espressione precedente si sostituirà la seguente, che ha già significato intrinseco:

$$\left.\frac{(x, x_1, x_2, dx_1, dx_2, d^3x)}{\sqrt{(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22})}}\right]$$

uguagliate a zero, definiscono un sistema di curve invariante per collineazioni, di cui pare agevole dare una definizione geometrica. Ciascuna di esse si può assumere come una prima forma differenziale (che negli esempî precedenti è del primo ordine) corrispondente a V_r. Bisognerebbe trovarne altre in modo che, come nel caso delle ipersuperficie, ne restassero individuati i coefficienti di un sistema di equazioni alle derivate parziali, a cui soddisfacessero tutte e sole le combinazioni lineari delle coordinate di un punto di V_r.

Prescindendo dalla complicazione di dover svolgere trattazioni distinte a seconda dei valori numerici di n, r, si presenta un'altra grave difficoltà: che cioè non pare facile di poter evitare forme di *ordine superiore al primo*. Ci si potrebbe però chiedere se, almeno nei casi in cui, come negli esempî precedenti, si è trovata una forma del solo primo ordine, si possano ridurre, col suo sussidio, al primo ordine le eventuali altre forme di ordine superiore al primo, che si presentassero in tali ricerche (ciò che avviene nel caso $r = n \geq 2$). Così, per es., se si presentasse una forma del tipo

$$F = A(du\, d^2v - dv\, d^2u) + B,$$

ove A, B sono forme del primo ordine, è ben chiaro che allo studio della F non si può sostituire quello delle forme A, B, che non hanno significato intrinseco, cioè indipendente dalla scelta delle coordinate u, v. Ma, se noi potessimo scrivere la F nella forma

$$F = A_1(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u) + B_1,$$

ove le $\delta^2 u$, $\delta^2 v$ formassero, come le du, dv, un sistema controvariante, allo studio della F potremmo sostituire quello delle A_1, B_1 del solo *primo* ordine. Qualche studio su tali differenziali *controvarianti* sarà svolto in una prossima Nota.

Mineralogia. — *Cassiterite e titanite di Baveno*. Nota del Socio Ettore Artini [1].

Qualche tempo fa l'ing. G. Codara, intelligente e appassionato collezionista di minerali, in una escursione alle cave di granito di Baveno e Feriolo, ebbe modo di notare, in un masso di granito bianco della Cava Adami, presso la estremità occidentale della zona coltivata, una geodina nella quale brillava un cristallino di un minerale che egli riconobbe subito essere differente da tutti quelli finora noti in questa classica località. Riusciti vani i tentativi di staccare dal masso tutta la geode, o parte di essa, l'ing. Codara ne estrasse il cristallino, che gentilmente poi mi offerse in dono, perchè lo potessi studiare e descrivere. Un esame sommario mi persuase subito che si trattava di *cassiterite*, specie minerale nuova per Baveno, e perciò interessante, tanto che ritenni utile una nuova visita alla località, nella speranza di trovarne altri esemplari. L'escursione, fatta in compagnia del primo scopritore, non fu interamente fortunata, perchè non ci permise di trovare altri nitidi cristallini, ma non fu nemmeno interamente vana;

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1920.