ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

MDCIII

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« Lo scopo di questa breve Nota è di porre in rilievo alcune analogie che esistono fra i gruppi di caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4, e propriamente faremo vedere in che maniera certe proprietà note del primo gruppo si estendono al secondo.

« Per tutto quello che diremo ci riferiremo sempre all'altra nostra Nota pubblicata in questi stessi Rendiconti [1] e intitolata · *Su di un'estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia.*

« Si sa che pel genere 3, se si conosce una delle 28 caratteristiche dispari, l'equazione che ha per radici le altre 27 non ha una risolvente di grado inferiore al 27^{mo}; essa corrisponde all'equazione delle 27 rette di S_3 che, come ha dimostrato Jordan, ha appunto la indicata proprietà. Se si conosce poi un'altra delle 27 caratteristiche, allora le altre 26 si separano in due sistemi di transitività, $10+16$, e l'equazione delle seconde 16 ha per risolvente l'equazione delle prime 10, la quale a sua volta, colla risoluzione di un'equazione *generale* di 5° grado, si decompone in cinque fattori quadratici, ognuno dei quali corrisponde ad uno dei noti cinque coni di Kummer della superficie di 4° ordine a conica doppia, o anche ai cinque piani tritangenti passanti per una retta della superficie di 3° ordine [2].

« Se si conosce poi una delle 16 radici, le altre 15 si separano in due sistemi di transitività, $5+10$, e anche qui l'equazione delle seconde 10 ha per risolvente un'equazione *generale* di 5° grado, e quindi possiamo dire che conoscendo *due* caratteristiche dispari di genere 3, la conoscenza delle altre dipende da un'equazione di 5° grado generale, e conoscendone *tre formanti una terna pari*, la conoscenza delle altre dipende anche da un'equazione *generale* di 5° grado.

« Ora si può far vedere che qualcosa di analogo succede per le caratteristiche dispari di genere 4, che corrisponderebbero ai piani tritangenti della sestica storta.

« Conosciute *due* delle 120 caratteristiche dispari, abbiamo già visto nella Nota citata (§ 1) che le altre 118 si separano in due sistemi di transitività, $54+64$; si può qui far vedere che l'equazione delle seconde 64 ha per risolvente l'equazione delle prime 54, la quale a sua volta si scinde

[1] V. pag. 65.

[2] Il Cremona nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo (1871) dimostrò che con una conveniente trasformazione quadratica, la superficie di 3° ordine diventa la S_4 di Clebsch, e i cinque piani passanti per una retta corrispondono ai cinque coni di Kummer.

in 27 fattori quadratici dopo la risoluzione di un'equazione di 27^{mo} grado, che *non ha risolventi di grado più basso*, e che quindi tiene qui le veci dell'equazione *generale* di 5^o grado che si trovava pel genere 3, o anche si può dire che questa risolvente di 27^{mo} grado è la diretta generalizzazione dell'equazione dei cinque coni di Kummer.

« Infatti adoperando la solita rappresentazione, le due caratteristiche fisse sieno rappresentate dai piani

$$(129) \quad , \quad (1210).$$

Allora i 54 piani che fanno con questi due una terna dispari sono dei tipi [1]

$$(9\ i\ j) \quad , \quad (10\ i\ j)$$

dove i, j rappresentano tutte le combinazioni a due a due dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (meno la combinazione 1, 2). Si vede allora che tali 54 piani si riuniscono a due a due e ogni coppia corrisponde ad una delle 27 rette (meno la (12)) che congiungono a due a due quelli otto punti. Ogni piano di una delle 27 coppie individua l'altro, perchè con esso e coi due piani fissi forma una quaterna-zero [2].

« Consideriamo allora solo i 27 piani passanti pel punto (9).

« È facile vedere che questi si raggruppano fra loro in una configurazione che è isomorfa con quella delle 27 rette della superficie di 3^o ordine, perchè essi si riuniscono a tre a tre in maniera simile a quella colla quale a tre a tre si riuniscono le 27 rette.

« Facendo infatti corrispondere univocamente a ciascuno dei 27 piani, una delle 27 rette si ha che, come nella rappresentazione delle caratteristiche di genere 3, le tre rette

$$\begin{array}{rccc} & (13) & (34) & (42) \\ \text{ovvero} & (34) & (56) & (78) \end{array}$$

insieme colla retta fissa (12) formano una quaterna-zero, così qui i piani corrispondenti

$$\begin{array}{rccc} & (913) & (934) & (942) \\ \text{ovvero} & (934) & (956) & (978) \end{array}$$

rispettivamente coi piani fissi (912) ovvero (1012) dànno quaterna-zero.

« Possiamo dunque concludere che il gruppo delle 27 coppie di piani è isomorfo con quello delle 27 rette di S_3, e quindi, come questo, non potrà avere risolventi di grado più basso.

« Resta a far vedere che l'equazione di queste 27 coppie è una risolvente dell'equazione dei 64 piani.

(1) Mem. I, Annali v. XX, § 16.
(2) Idem. § 15.

« Ora come per le 16 rette della superficie di Clebsch si fa vedere che esse, rispetto a ciascuno dei cinque coni di Kummer, si separano in due sistemi di quattro coppie ciascuno, così anche qui succede l'analogo. Prendiamo p. es. la coppia di piani (923) (1023). I 64 piani sono di due tipi cioè

$$(i,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \begin{cases} (9\ 10\ i) & \text{in numero di } 8 \\ (i\ \ j\ \ k) & \text{»} \quad 56 \end{cases}$$

Si riconosce subito che ciascuno di questi unito al piano fisso (912) e al piano (923) forma una terna di carattere opposto a quella che forma se in luogo di (923) si pone il piano (1023); propriamente solo 32 di essi, riuniti in 16 coppie, formano terna dispari con (912) (923), mentre gli altri formano terna pari con questi, e dispari con (912) (1023), cioè

$$\begin{array}{cccc} (9101)\ (9103)\ , & (124)\ (324)\ , & (125)\ (325)\ , & (126)\ (326) \\ (127)\ (327)\ , & (128)\ (328)\ , & (145)\ (345)\ , & (146)\ (346) \\ (147)\ (347)\ , & (148)\ (348)\ , & (156)\ (356)\ , & (157)\ (357) \\ (158)\ (358)\ , & (167)\ (367)\ , & (168)\ (368)\ , & (178)\ (378) \end{array}$$

formano terna dispari con (912) (923), e tutti gli altri formano invece terna pari.

« Si vede dunque che i 64 piani si dispongono in 27 doppî sistemi, ciascuno composto di $16 + 16$ coppie; ognuno di questi sistemi è coordinato poi con uno dei 54 piani.

« Conosciuti i 54 piani, restano conosciuti razionalmente anche i 64, perchè p. es. il piano (1910) (uno dei 64) è l'unico che con i sette piani fissi o già noti

$$(192)\quad (193)\quad (194)\quad (195)\quad (196)\quad (197)\quad (198)$$

formi un sistema di 8 piani, in cui tutte le terne sono pari (1).

« Concludiamo dunque che la risoluzione dell'equazione dei 64 piani dipende da un'equazione di 27^{mo} grado (non avente risolvente di grado più basso) e da equazioni quadratiche.

« Se ora daccapo si suppone noto uno solo dei 64 piani, allora come si è visto nella Nota citata, la risoluzione del problema dipende ancora da un'equazione di 27^{mo} grado il cui gruppo è isomorfo con quello antecedente.

« Possiamo quindi conchiudere:

« *Se si conoscono due caratteristiche dispari di genere 4, la conoscenza delle altre dipende da un'equazione di 27^{mo} grado non avente risolventi di grado minore; se se ne conoscono tre, il problema dipende ancora da un'equazione di 27^{mo} grado come la precedente. Questo fatto è la precisa estensione di quello che succede per le caratteristiche di genere 3, nel qual caso in luogo di un'equazione di 27^{mo} grado, ce n'è una generale di 5^o grado* ».

(1) Mem. cit., § 18.