# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME II.**

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

**Meccanica.** — *Sul moto di un fluido contenuto in un involucro ellissoidico solido.* Nota del dott. Orazio Tedone, presentata dal Corrispondente Volterra.

« 1. Il problema accennato nel titolo di questa Nota è stato trattato, insieme ad altri, per la prima volta dal prof. Voigt in una Memoria pubblicata nei *Nachrichten von der Königl. Gesell. der Wiss.* di Gottinga del 1891 sotto il nome *Beiträge zur Hydrodynamik*. Io mi propongo ora di trovare le equazioni differenziali del movimento con metodo diverso da quello tenuto dall'illustre autore e di far uso nello stesso tempo di altre variabili; ciò ho fatto credendo che, oltre alle semplificazioni che ne risultano, vengano messe in maggior luce le relazioni che legano il nostro problema, con quello del moto di un sistema rigido e con quello del moto di un ellissoide fluido libero le cui particelle si attirano secondo la legge di Newton.

« 2. Sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

l'equazione della superficie interna dell'involucro solido contenente il fluido. È chiaro che la condizione che questo ellissoide sia una parete rigida equivale a supporre che il fluido sia soggetto a conservare la forma di un ellissoide di cui siano costanti le grandezze e le direzioni degli assi.

« Noi supporremo che le particelle del fluido si attirino secondo la legge di Newton e che il fluido sia omogeneo; può supporsi però che la densità sia qualunque se supponiamo che sul fluido non agiscano forse esterne.

« Accenniamo ora rapidamente alla dimostrazione che in queste ipotesi il fluido si può muovere in modo che:

1° le coordinate di un suo elemento ad un tempo qualunque siano funzioni lineari (omogenee) delle coordinate iniziali;

2° la pressione nell'interno del fluido sia una funzione del 2° grado omogenea completa nelle coordinate al tempo $t$ e quindi nelle coordinate iniziali;

3° la figura esterna del fluido sia costantemente un ellissoide di cui siano costanti tanto la grandezza quanto la direzione degli assi. Se difatti nelle equazioni dell'idrodinamica di Lagrange si sostituiscono per le coordinate $x$, $y$, $z$, per la funzione potenziale e per la pressione le espressioni supposte in funzione delle coordinate iniziali $x_0$, $y_0$, $z_0$ osservando che in un caso la funzione potenziale è una funzione omogenea di 2° grado e nell'altro è una costante, si otterranno delle espressioni lineari in $x_0$, $y_0$, $z_0$ che devono essere identicamente soddisfatte per infiniti valori di $x_0$, $y_0$, $z_0$. Si ottengono così 9 equazioni differenziali contenenti 15 funzioni incognite di cui però non tutte compaiono derivate. Queste 15 funzioni sono i 9 coefficienti delle espressioni $x, y, z$ e i 6 che compariscono nell'espressione della pressione.

« La condizione, che gli assi dell'ellissoide, che è la figura esterna del fluido, siano costanti, ci porta alla condizione che una certa equazione di terzo grado, nei cui coefficienti compariscono le nostre funzioni incognite, siano costanti, d'onde risultano tre equazioni in termini finiti.

« La condizione finalmente che le direzioni di questi assi siano costanti ci porta ad altre tre equazioni pure in termini finiti.

« Abbiamo in tutto dunque quindici equazioni, quante son necessarie a determinare le nostre quindici funzioni incognite.

« È inutile quì tener conto della equazione dell'incompressibilità perchè è contenuta nelle precedenti.

« Si troverebbe facilmente che questo sistema di equazioni è suscettibile di determinare per le nostre incognite un sistema di funzioni finite e continue del tempo.

« 3. Accennato così alla dimostrazione dell'ammissibilità delle nostre ipotesi, passiamo a trovare le equazioni differenziali del problema nel modo che segue:

« Cominciamo coll'osservare che in virtù delle ipotesi fatte tutte le particelle del fluido che all'istante iniziale si trovano sull'ellissoide

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=k^2$$

al tempo $t$ si trovano sull'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2$$

onde è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\,. \tag{2}$$

« Le relazioni che legano $x, y, z$ ad $x_0\, y_0\, z_0$ possono porsi sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\alpha_1\frac{x_0}{a}+\alpha_2\frac{y_0}{b}+\alpha_3\frac{z_0}{c}\\ \frac{y}{b}&=\beta_1\frac{x_0}{a}+\beta_2\frac{y_0}{b}+\beta_3\frac{z_0}{c}\\ \frac{z}{c}&=\gamma_1\frac{x_0}{a}+\gamma_2\frac{y_0}{b}+\gamma_3\frac{z_0}{c}\end{aligned}\right. \tag{3}$$

e a causa della (2) $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \gamma_3$ sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale e possono quindi interpretarsi come i coseni di direzione di una terna di assi ortogonali mobili $x'\, y'\, z'$ rispetto agli assi fissi $x, y, z$.

« Dalle (3) derivando e facendo uso nuovamente di esse si trova:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a}\frac{dx}{dt} &= \frac{u}{a} = \frac{z}{c}\left(\gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+\frac{y}{b}\left(\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)\\
\frac{1}{b}\frac{dy}{dt} &= \frac{v}{b} = \frac{x}{a}\left(\alpha_1\frac{d\beta_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\beta_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\beta_3}{dt}\right)+\frac{z}{c}\left(\gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right)\\
\frac{1}{c}\frac{dz}{dt} &= \frac{w}{c} = \frac{y}{b}\left(\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right)+\frac{x}{a}\left(\alpha_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right)
\end{aligned}\right.$$

chiamando con $u$, $v$, $w$ le componenti della velocità del punto $(x, y, z)$; se ora si pone:

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} &= p\\
\gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt} &= q\\
\alpha_1\frac{d\beta_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\beta_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\beta_3}{dt} &= r
\end{aligned}\right.$$

sarà:

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{u}{a} &= q\frac{z}{c}-r\frac{y}{b}\\
\frac{v}{b} &= r\frac{x}{a}-p\frac{z}{c}\\
\frac{w}{c} &= p\frac{y}{b}-q\frac{x}{a}
\end{aligned}\right.$$

« Le componenti della rotazione istantanea del fluido saranno:

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)p=\frac{1}{2}\frac{b^2+c^2}{bc}p\\
\eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)q=\frac{1}{2}\frac{c^2+a^2}{ac}q\\
\zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)r=\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{ab}r
\end{aligned}\right.$$

« Sarà quindi

$$\xi = p\ ,\ \eta = q\ ,\ \zeta = r$$

solo quando

$$a = b = c \quad \text{ovvero} \quad \eta = \zeta = q = r = 0\ ,\ b = c$$

« In ciascuno di questi casi l'ellissoide rota come un corpo rigido con velocità costante intorno ad un asse fisso.

« 4. Supponendo la densità del fluido eguale ad 1, la forza viva del sistema è data da

$$(7)\quad \mathrm{T}=\frac{1}{2}\int_s (u^2+v^2+w^2)\,ds=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}}{5}\left\{(b^2+c^2)p^2+(c^2+a^2)q^2+(a^2+b^2)r^2\right\}$$

se con M s'indica la massa del fluido e con $s$ lo spazio da esso occupato.

« Applicando ora il principio di Hamilton coll'osservare che il potenziale delle forze è una costante, otterremo le equazioni differenziali del nostro problema eguagliando a zero la variazione dell'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}dt$$

il che ci dà:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} \delta r \right\} dt = 0.$$

Se ora si pone

$$(4') \left\{ \begin{aligned} p' &= \beta_1 \delta\gamma_1 + \beta_2 \delta\gamma_2 + \beta_3 \delta\gamma_3 \\ q' &= \gamma_1 \delta\alpha_1 + \gamma_2 \delta\alpha_2 + \gamma_3 \delta\alpha_3 \\ r' &= \alpha_1 \delta\beta_1 + \alpha_2 \delta\beta_2 + \alpha_3 \delta\beta_3 \end{aligned} \right.$$

e si osserva che

$$\delta p = \frac{dp'}{dt} + q' r - q r' , \quad \delta q = \frac{dq'}{dt} + r' p - r p' , \quad \delta r = \frac{dr'}{dt} + p' q - p q'$$

si avrà, sostituendo ed eseguendo delle integrazioni per parti:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} r - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} q = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} p - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} r = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} q - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} p = 0 \end{aligned} \right.$$

ossia sostituendo per T l'espressione (7):

$$(8') \left\{ \begin{aligned} (b^2 + c^2) \frac{dp}{dt} &= \left\{ (b^2 + a^2) - (a^2 + c^2) \right\} qr \\ (c^2 + a^2) \frac{dq}{dt} &= \left\{ (c^2 + b^2) - (b^2 + a^2) \right\} rp \\ (a^2 + b^2) \frac{dr}{dt} &= \left\{ (a^2 + c^2) - (c^2 + b^2) \right\} pq. \end{aligned} \right.$$

« Queste equazioni, se chiamiamo

$$(9) \qquad \mathrm{A} = b^2 + c^2 \qquad \mathrm{B} = c^2 + a^2 \qquad \mathrm{C} = a^2 + b^2$$

diventano:

$$(8'') \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} \frac{dp}{dt} &= (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, qr \\ \mathrm{B} \frac{dq}{dt} &= (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, pr \\ \mathrm{C} \frac{dr}{dt} &= (\mathrm{B} - \mathrm{A})\, pq \end{aligned} \right.$$

ossia le equazioni differenziali del moto inverso di un corpo solido intorno all'origine delle coordinate e che abbia per assi principali d'inerzia gli assi fissi $x$, $y$, $z$ e per momenti d'inerzia rispetto a questi assi A, B, C.

« 5. Del sistema (8') si conoscono due integrali: quello che deriva dal principio delle forze vive e quello che si deduce dal principio della conservazione delle rotazioni di Helmholtz.

« Il primo si traduce nell'equazione

$$\text{(10)} \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = (b^2+c^2)\,p^2 + (c^2+a^2)\,q^2 + (a^2+b^2)r^2 = \text{cost.}$$

« Osservando poi che è

$$\xi = \xi_0 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial z_0}\,, \quad \eta = \cdots, \quad \zeta = \cdots$$

si otterrà:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \alpha_1 \frac{\xi_0}{a} + \alpha_2 \frac{\eta_0}{b} + \alpha_3 \frac{\zeta_0}{c} \\ \frac{\eta}{b} &= \beta_1 \frac{\xi_0}{a} + \beta_2 \frac{\eta_0}{b} + \beta_3 \frac{\zeta_0}{c} \\ \frac{\zeta}{c} &= \gamma_1 \frac{\xi_0}{a} + \gamma_2 \frac{\eta_0}{b} + \gamma_3 \frac{\zeta_0}{c} \end{aligned} \right.$$

per cui quadrando, sommando e sostituendo per $\xi\ \eta\ \zeta$ i valori (6); si avrà pel 2° integrale:

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} &(b^2+c^2)^2\,p^2 + (c^2+a^2)^2\,q^2 + (a^2+b^2)^2\,r^2 = \\ &\quad = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{cost.} \end{aligned}$$

« Queste equazioni potrebbero dedursi direttamente dalle nostre equazioni differenziali.

« Si può ora notare che nel caso almeno di un ellissoide ad assi disuguali mancano gli integrali delle aree, poichè il sistema non può rotare liberamente come un corpo rigido intorno a nessun asse.

« Gli integrali delle forze vive e quello delle aree che si possono considerare nel moto di un corpo solido di momenti d'inerzia A, B, C di cui s'è detto sopra, corrispondono rispettivamente all'integrale delle forze vive e a quello di Helmholtz del nostro problema.

« Però mentre nel problema del moto di un corpo rigido, l'asse della coppia di quantità di moto è la retta

$$\frac{x}{Ap} = \frac{y}{Bq} = \frac{z}{Cr} \quad \text{ovvero} \quad \frac{ax}{\xi} = \frac{by}{\eta} = \frac{cz}{\zeta}$$

l'asse di rotazione nel nostro problema è la retta

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta}$$

« Non mancherò ancora di osservare che tutte queste analogie che passano fra il moto di un corpo rigido e quello di un fluido in un involucro solido, sono in istretta relazione con la legge di reciprocità di Dedekind nel problema del moto di un ellissoide fluido libero.

« 6. Supponiamo ora che sia

$$a > b > c$$

sarà allora

$$A < B < C$$

« Se ora il fluido rota per un istante intorno all'asse maggiore o all'asse minore dell'ellissoide, il sistema rigido corrispondente roterà in quell'istante intorno al suo asse massimo o minimo d'inerzia, poichè se p. es.

$$\eta = \zeta = 0$$

si ha pure

$$q = r = 0$$

« Ora, com'è noto, il corpo solido roterà sempre intorno a quest'asse con velocità costante, e perciò lo stesso avverrà pel fluido. Così è mostrato anche come sia facile trasportare dei teoremi da una all'altra teoria.

« 7. È noto che le nostre equazioni differenziali (8′) o (8″) s'integrano nel caso generale con funzioni ellittiche, e nel caso particolare in cui $b = c$ e quindi $B = C$ con funzioni trigonometriche. Resta però a completare la soluzione del problema e trovare cioè le funzioni $x, y, z$.

« Perciò si può far uso o delle equazioni (5) le quali si possono porre anche sotto la forma:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{dx}{dt} &= q\frac{z}{c} - r\frac{y}{b} \\ \frac{1}{b}\frac{dy}{dt} &= r\frac{x}{a} - p\frac{z}{c} \\ \frac{1}{c}\frac{dz}{dt} &= p\frac{y}{b} - q\frac{x}{a} \end{aligned} \right.$$

o pure si può cercare di determinare i nove coseni $\alpha_1 \ldots\ldots \gamma_3$ onde poter costruire le espressioni (3).

« Perciò osserviamo che le tre terne di coseni

$$\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,; \quad \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2\,; \quad \alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$$

soddisfano alle equazioni:

$$(13) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = q\gamma - r\beta\,, \frac{d\beta}{dt} = r\alpha - p\gamma\,, \frac{d\gamma}{dt} = p\beta - q\alpha\,.$$

« Questi due sistemi di equazioni in fondo non sono differenti, ed il primo anzi si riduce al secondo prendendo per funzioni incognite $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ invece di $x, y, z$.

« Le espressioni

$$x = \xi\ ,\ y = \eta\ ,\ z = \zeta$$

formano un sistema d'integrali particolari del sistema di equazioni (12), mentre le espressioni

$$\alpha = \frac{\xi}{a}\,,\quad \beta = \frac{\eta}{b}\,,\quad \gamma = \frac{\zeta}{c}$$

formano un sistema d'integrali particolari del sistema (13); difatti sostituendo effettivamente per $x$, $y$, $z$ o per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ le espressioni date, tenendo presenti i valori (6) di $\xi$, $\eta$, $\zeta$, ciascuno dei sistemi (12) o (13) si muta nel sistema (8') e per ipotesi $p$, $q$, $r$ sono integrali di quest'ultima. L'integrazione di ciascuno dei sistemi di equazioni (12) o (13) si ottiene perciò, per note teorie, con una sola quadratura (1). Il sistema (13) è anche quello che dovremmo integrare per completare la soluzione del problema del moto del sistema rigido a cui è stato più volte accennato.

« Da tutto ciò risulta evidente che i risultati trovati dal sig. Venske nell'aggiunta alla Memoria di Voigt possano considerarsi come immediata conseguenza di cose note.

« 8. Si può dare una rappresentazione geometrica del moto studiato.

« Consideriamo il moto inverso a quello di un solido avente per momenti principali d'inerzia A, B, C.

« Per rappresentare geometricamente questo movimento inverso, si può immaginare che la herpolodia rotoli sulla polodia, fissa in questo caso. Se la herpolodia si trascina dietro una sfera di raggio 1, avente il centro nella origine, per trovare la traiettoria di un elemento del fluido basta cercare la curva corrispondente alla traiettoria di un determinato punto della sfera nell'affinità determinata dalle equazioni:

$$\mathrm{X} = \frac{x}{a}\,,\quad \mathrm{Y} = \frac{y}{b}\,,\quad \mathrm{Z} = \frac{z}{c}\,,$$

sicchè il moto dell'ellissoide fluido sarà quello della figura ottenuta dalla sfera, mediante la detta affinità.

« Queste considerazioni geometriche mi sono state suggerite dal prof. Volterra.

« 9. Per determinare la pressione nell'interno del fluido, osserviamo che, nel caso p. es. in cui mancano le forze esterne, le equazioni di Eulero ci danno:

$$-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\,,\ \text{ecc.}$$

(1) Vedi p. es. Darboux, *Théorie des surfaces*, T, I, Chap. 2°.

dove con P s'indica appunto la pressione cercata. Sostituendo nelle equazioni precedenti per $u$, $v$, $w$ le espressioni (5) si trova:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -x\,(q^2+r^2) + 2y\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq + 2z\,\frac{ac}{a^2+c^2}\,pr$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq - y\,(p^2+r^2) + 2z\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,qr$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 2x\,\frac{ac}{a^2+c^2}\,pr + 2y\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,qr - z\,(p^2+q^2)$$

per cui integrando:

$$P = \frac{1}{2}\left\{x^2(q^2+r^2) + y^2(r^2+p^2) + r^2(p^2+q^2)\right\} -$$
$$-2\left\{\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq\,xy + \frac{bc}{b^2+c^2}\,qr\,yz + \frac{ca}{c^2+a^2}\,rp\,zx\right\}$$

« Componendo le pressioni che il fluido esercita sui varî elementi della parete rigida, e chiamando X, Y, Z; L', M', N' le componenti della forza e della coppia resultanti, otterremo:

$$X = \int_\sigma P\cos n_a x\,d\sigma = \int_S \frac{\partial p}{\partial x}\,ds = 0\,,\quad Y = 0\,,\ Z = 0$$

$$L' = \int_\sigma P(y\cos n_a z - z\cos n_a y)\,d\sigma = \int_S\left(y\frac{\partial P}{\partial z} - z\frac{\partial P}{\partial y}\right)ds =$$
$$= 2\,\frac{M}{5}\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,(c^2-b^2)\,qr$$

$$M' = 2\,\frac{M}{5}\,\frac{ca}{c^2+a^2}\,(a^2-c^2)\,pr$$

$$N' = 2\,\frac{M}{5}\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,(b^2-a^2)\,pq\ ».$$

## Meccanica. — *Sul massimo d'attrazione di una piramide retta a base regolare.* Nota del dott. Nazzareno Pierpaoli, presentata dal Socio Blaserna.

« Mi sono proposto di determinare l'attrazione di una piramide retta a base regolare sopra un punto qualunque della perpendicolare condotta a quest'ultima dal vertice, allo scopo di avere un'espressione generale, che mi permettesse di ricavare come casi particolari le attrazioni di una piramide o di un cono sul vertice e sul centro della base, e di risolvere quindi la questione « Dato il volume di una piramide retta a base regolare o di un cono circolare retto, quale dev'essere il rap-