# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME II.**

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

dove con P s'indica appunto la pressione cercata. Sostituendo nelle equazioni precedenti per $u$, $v$, $w$ le espressioni (5) si trova:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -x\,(q^2+r^2) + 2y\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq + 2z\,\frac{ac}{a^2+c^2}\,pr$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq - y\,(p^2+r^2) + 2z\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,qr$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = 2x\,\frac{ac}{a^2+c^2}\,pr + 2y\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,qr - z\,(p^2+q^2)$$

per cui integrando:

$$P = \frac{1}{2}\left\{x^2\,(q^2+r^2) + y^2\,(r^2+p^2) + r^2\,(p^2+q^2)\right\} -$$

$$-2\left\{\frac{ab}{a^2+b^2}\,pq\,xy + \frac{bc}{b^2+c^2}\,qr\,yz + \frac{ca}{c^2+a^2}\,rp\,zx\right\}$$

« Componendo le pressioni che il fluido esercita sui varî elementi della parete rigida, e chiamando X, Y, Z; L′, M′, N′ le componenti della forza e della coppia resultanti, otterremo:

$$X = \int_\sigma P\cos n_a x\,d\sigma = \int_s \frac{\partial p}{\partial x}\,ds = 0\,,\quad Y = 0\,,\ Z = 0$$

$$L' = \int_\sigma P(y\cos n_a z - z\cos n_a y)\,d\sigma = \int_s \left(y\frac{\partial P}{\partial z} - z\frac{\partial P}{\partial y}\right) ds =$$

$$= 2\,\frac{M}{5}\,\frac{bc}{b^2+c^2}\,(c^2-b^2)\,qr$$

$$M' = 2\,\frac{M}{5}\,\frac{ca}{c^2+a^2}\,(a^2-c^2)\,pr$$

$$N' = 2\,\frac{M}{5}\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,(b^2-a^2)\,pq\ \text{».}$$

**Meccanica.** — *Sul massimo d'attrazione di una piramide retta a base regolare.* Nota del dott. NAZZARENO PIERPAOLI, presentata dal Socio BLASERNA.

« Mi sono proposto di determinare l'attrazione di una piramide retta a base regolare sopra un punto qualunque della perpendicolare condotta a quest'ultima dal vertice, allo scopo di avere un'espressione generale, che mi permettesse di ricavare come casi particolari le attrazioni di una piramide o di un cono sul vertice e sul centro della base, e di risolvere quindi la questione « Dato il volume di una piramide retta a base regolare o di un cono circolare retto, quale dev'essere il rap-

porto fra l'altezza ed il perimetro della base per avere sul vertice e sul centro della base il massimo d'attrazione ».

« Due metodi diversi potrebbero condurre alla determinazione di tale espressione generale.

« Si potrebbe anzitutto immaginare la piramide data divisa in tanti strati paralleli alla base, determinare di uno qualunque di essi l'attrazione sul punto che si considera, e poi mediante una conveniente integrazione calcolare l'attrazione dell'intera piramide.

« Oppure potremmo seguire il noto metodo generale delle piramidi parziali, applicabile per determinare l'attrazione di un poliedro qualunque sopra un punto comunque situato rispetto ad esso, il quale consiste nel considerare il punto attratto come vertice di tante piramidi parziali aventi rispettivamente per basi le faccie del poliedro e nel fare poi la somma delle attrazioni dovute a tutte queste piramidi, coll'avvertenza, nel caso il punto attratto sia esterno al poliedro, di prendere con segno contrario le attrazioni di quelle piramidi che risultano completamente esterne al poliedro medesimo.

« Io mi sono attenuto a questo secondo metodo, il quale riduce la questione a determinare l'attrazione di una piramide sul vertice, che, essendo data dal prodotto dell'altezza per l'attrazione della base, sarà nota quando di quest'ultima si conosceranno le 3 componenti ortogonali X ; Y ; Z, di cui le prime due parallele e la terza normale alla base medesima.

« Per fissare le idee supponiamo il punto attratto nell'interno della piramide data (la cui densità potremo ritenere uguale all'unità) ad una distanza G dal vertice, e siano:

H la sua altezza,
R il raggio del circolo circoscritto alla base,
$2b$ il lato della medesima
ed $n$ il numero dei suoi lati.

« In allora, scelto convenientemente un sistema di assi coordinati rettangolari $x$, $y$, $z$ con l'origine nel punto attratto, la componente Z dell'attrazione della base di una qualunque di quelle piramidi parziali sull'origine potremo facilmente dedurla dalla formola generale:

$$Z = 2\pi k - k \sum \left[ \text{arc. tang} \frac{h \{ (x_m - x_{m+1}) x_m + (y_m - y_{m+1}) y_m \}}{(x_m y_{m+1} - x_{m+1} y_m) \sqrt{x_m^2 + y_m^2 + h^2}} + \right.$$
$$\left. + \text{arc. tang} \frac{-h \{ (x_m - x_{m+1}) x_{m+1} + (y_m - y_{m+1}) y_{m+1} \}}{(x_m y_{m+1} - x_{m+1} y_m) \sqrt{x_{m+1}^2 + y_{m+1}^2 + h^2}} \right] \quad 1)$$

la quale esprime l'attrazione di un qualunque poligono materiale in funzione delle coordinate $x_m$, $y_m$ de' suoi vertici, sopra un punto della perpendicolare

al suo piano, passante nell'interno del perimetro, ad una distanza $h$ da esso, ed in cui $k$ sta ad indicare la massa contenuta nell'unità di superficie [1].

« Il perimetro s'intende percorso nello stesso senso in cui si passa dalla direzione positiva dell'asse $x$ alla direzione positiva dell'asse $y$, e fra i valori di arc. tang. va preso quello compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

« Quanto poi alla componente X, si calcolerà mediante l'altra formola generale [2]:

$$X = k\left[\frac{y_m - y_{m+1}}{\sqrt{(x_m - x_{m+1})^2 + (y_m - y_{m+1})^2}}\right.$$

$$\left.\log\frac{(y_m - y_{m+1})y_m + (x_m - x_{m+1})x_m + \sqrt{(x_m - x_{m+1})^2 + (y_m - y_{m+1})^2}\cdot\sqrt{x_m^2 + y_m^2 + h}}{(y_m - y_{m+1})y_{m+1} + (x_m - x_{m+1})x_{m+1} + \sqrt{(x_m - x_{m+1})^2 + (y_m - y_{m+1})^2}\cdot\sqrt{x_{m+1}^2 + y_{m+1}^2 + h^2}}\right] \qquad 2)$$

ed un'analoga espressione servirà a calcolare la componente Y.

« Relativamente al primo modo di risolvere la questione, è chiaro che fatta l'accennata suddivisione in strati paralleli alla base della piramide data, l'attrazione di uno qualunque di essi alla distanza $z$ dall'origine (punto attratto), si otterrà senz'altro dalla 1), la quale si riduce in questo caso particolare di un poligono regolare di $n$ lati a

$$Z = \left\{2\pi - 2n \text{ arc. tang}\frac{z \text{ tang } \varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right\} dz$$

essendo $r$ il raggio del circolo circoscritto alla base dello strato considerato di spessore $dz$, e $\varphi = \frac{\pi}{n}$. Quindi dicendo A l'attrazione totale della piramide data, sarà

$$A = 2\int\left\{\pi - n \text{ arc. tang}\frac{z. \text{ tang } \varphi}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right\} dz,$$

ed allora non rimarrà altro che esprimere $r$ in funzione di $z$ ed eseguire quella integrazione fra i limiti convenienti. Siccome poi $r$ è funzione lineare di $z$, così si vede che in sostanza tutto dipende da un integrale della forma:

$$\int\left(\text{arc. tang}\frac{z}{\sqrt{\lambda + \mu z + \nu z^2}}\right) dz$$

il quale mediante integrazione per parti si riduce subito a forma algebrica.

« Col metodo delle piramidi parziali, abbiamo detto che il problema è condotto invece alla determinazione dell'attrazione di una piramide sul vertice. Per applicare ora convenientemente le formole generali 1) e 2) nel caso nostro in cui si tratta di una piramide retta a base regolare, converrà dapprima immaginare quest'ultima divisa in $2n$ triangoli rettangoli uguali e

(1) V. *Ricerche sull'attrazione delle montagne* di F. Keller, pag. 46.

(2) V. idem, pag. 12.

considerare quindi le $2n$ piramidi triangolari uguali aventi per basi questi triangoli e per altezza l'altezza stessa H della piramide data. Ognuna di queste darà così luogo a 4 piramidi parziali aventi il vertice nel punto attratto; ma è chiaro che due di queste piramidi non danno alcun contributo all'attrazione, e precisamente quelle relative alle due faccie che s'intersecano lungo H, cosicchè dovremo solo occuparci delle altre due aventi per basi, l'una la metà di una faccia laterale della piramide data, e l'altra uno dei $2n$ triangoli rettangoli in cui abbiamo divisa la base della medesima.

« Determinando dunque le attrazioni di queste due piramidi parziali in direzione H sul vertice comune; la loro somma moltiplicata per $2n$ darà l'attrazione totale cercata.

« Cominciamo dalla seconda. Stando alle nostre convenzioni l'origine è sempre nel vertice (punto attratto), il piano di base è parallelo al piano $xy$ e l'asse delle $z$ è in direzione H. Dunque per questa piramide basterà calcolare la componente Z dell'attrazione della base e moltiplicarla per l'altezza che per ipotesi è H-G. La formola 1) ci darà tale componente. Essa si riduce in questo caso a:

$$Z = \left\{ \varphi - \text{arc. tang} \frac{(H - G) \tan \varphi}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2}} \right\} dz$$

di guisa che chiamata $A_1$ l'attrazione esercitata da questa piramide, sarà:

$$A_1 = (H - G) \left\{ \varphi - \text{arc. tang} \frac{(H - G) \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2}} \right\}. \qquad 3)$$

« Passiamo all'altra piramide, cioè a quella che ha per base metà di una faccia laterale (pure triangolo rettangolo), e siano:

$h$ la sua altezza,

$a$ l'apotema laterale della piramide data,

e $q$ la porzione di essa compresa fra il punto $(ah)$ ed il lato $2b$.

« È chiaro che per questa piramide converrà calcolare separatamente le tre componenti dell'attrazione della base, proiettarle in direzione H e sommare. Ma scegliendo per asse delle $x$ una parallela ad $a$, l'asse delle $y$ risulterà parallelo a $2b$ e quindi perpendicolare ad H; sicchè potremo fare a meno di occuparci della componente Y e considerare solo le componenti X e Z. Avremo così dalle 2) e 1) rispettivamente:

$$X = \left\{ \log \frac{b + \sqrt{b^2 + q^2 + h^2}}{\sqrt{q^2 + h^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \log \frac{a(a - q) + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a - q)^2 + h^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{b^2 + q^2 + h^2} - (b^2 + aq)} \right\} dz$$

$$Z = \left\{ \pi - \text{arc. tang} \frac{ah}{b\sqrt{(a - q)^2 + h^2}} - \text{arc. tang} \frac{bh}{q\sqrt{b^2 + q^2 + h^2}} - \right.$$

$$\left. - \text{arc. tang} \frac{(aq + b^2)\, h}{b(a - q) \cdot \sqrt{b^2 + q^2 + h^2}} \right\} dz$$

ovvero essendo:

$$a = \sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}\,; \quad b = R \operatorname{sen} \varphi\,; \quad h = \frac{GR \cos \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}}\,;$$

$$q = \frac{H(H - G) + R^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}}$$

sarà:

$$X = \left\{ \log \frac{R \operatorname{sen} \varphi + \sqrt{(H - G)^2 + R^2}}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2 \cos^2\varphi}} - \right.$$

$$\left. - \frac{R \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2}} \log \frac{G(H + \sqrt{H^2 + R^2})}{\sqrt{H^2 + R^2}.\sqrt{(H - G)^2 + R^2} - \{H(H - G) + R^2\}} \right\} dz = [X] dz$$

$$Z = \left\{ \frac{\pi}{2} + \varphi - \text{arc. tang} \frac{GR^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\{H(H - G) + R^2 \cos^2\varphi\} \sqrt{(H - G)^2 + R^2}} - \right.$$

$$\left. - \text{arc. tang} \frac{\{H(H - G) + R^2\} \cos \varphi}{H \operatorname{sen} \varphi \sqrt{(H - G)^2 + R^2}} \right\} dz = [Z] dz.$$

Ed indicando con $\alpha$ l'angolo ($a$H), l'attrazione totale della piramide considerata sarà espressa da:

$$A_2 = \frac{GR \cos \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}} \left\{ [X] \cos \alpha + [Z] \operatorname{sen} \alpha \right\} \qquad 4)$$

in cui:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2 \cos^2\varphi}}\,.$$

Sicchè aggiungendo alla 4) la 3) si avrà la somma delle attrazioni delle due piramidi, e l'attrazione della piramide data sarà finalmente espressa da:

$$A = 2n (A_1 + A_2). \qquad 5)$$

Da questa per $G = 0$ e per $G = H$ si ricavano rispettivamente le attrazioni di una piramide sul vertice e sul centro della base, le quali sono date dalle due espressioni:

$$A_V = 2H \left\{ \pi - n \text{ arc. tang} \frac{H \operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right\} \qquad 6)$$

$$A_B = 2\pi \frac{HR \cos \varphi}{H^2 + R^2 \cos^2\varphi} \left\{ H \log \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} - \right.$$

$$\left. - \frac{HR \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{H^2 + R^2}} \log \frac{H^2 + H\sqrt{H^2 + R^2}}{R\sqrt{H^2 + R^2} - R^2} + R\varphi \cos \varphi \right\}. \qquad 7)$$

Inoltre come caso limite per $n = \infty$ si ottiene dalla 5) l'attrazione di un

cono circolare retto di altezza H e di raggio R sopra un punto qualunque del suo asse ad una distanza G dal vertice. Essa ha per espressione:

$$B = 2\pi (H - G) \left\{ 1 - \frac{H - G}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2}} \right\} +$$

$$+ 2\pi \frac{GR^2}{H^2 + R^2} \left\{ 1 + \frac{H}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2}} + \frac{H\sqrt{(H - G)^2 + R^2}}{H(H - G) + R^2} - \right.$$

$$- \frac{GR^2}{\sqrt{(H - G)^2 + R^2} \{ H(H - G) + R^2 \}} -$$

$$\left. - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \log \frac{G(H + \sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{H^2 + R^2}\sqrt{(H - G)^2 + R^2} - \{ H(H - G) + R^2 \}} \right\} \quad 8)$$

dalla quale poi per $G = 0$ e per $G = H$ si hanno:

$$B_v = 2\pi H \left\{ 1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right\} \quad 9)$$

$$B_B = 2\pi \frac{HR}{H^2 + R^2} \left\{ H + R - \frac{HR}{\sqrt{H^2 + R^2}} \log \frac{H^2 + H\sqrt{H^2 + R^2}}{R\sqrt{H^2 + R^2} - R^2} \right\} \quad 10)$$

che danno le attrazioni del cono sul vertice e sul centro della base.

« Stabilite così in generale le formole dell'attrazione di una piramide retta a base regolare sul vertice e sul centro della base, sono passato a risolvere l'accennata questione, a trovare cioè il rapporto fra l'altezza ed il perimetro della base perchè l'attrazione sul vertice e sul centro della base sia un massimo.

« Mi sono dapprima occupato del vertice ed in questa Nota darò appunto i risultati ad esso relativi.

« Le piramidi considerate sono quelle corrispondenti ai valori $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ e come caso limite il cono ($n = \infty$).

« Il processo tenuto è il seguente: La 6) dà l'attrazione di una piramide sul vertice; essa può anche scriversi:

$$A_v = 2 \frac{H}{R} \left\{ \pi - n \text{ arc. tang} \frac{\frac{H}{R} \text{ tang } \varphi}{\sqrt{\left(\frac{H}{R}\right)^2 + 1}} \right\} R. \quad 11)$$

D'altra parte il volume della piramide è dato da:

$$V = \frac{1}{3} nHR^2 \text{ sen } \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3} n . R^3 \frac{H}{R} \text{ sen } \varphi \cos \varphi \quad 12)$$

e la condizione del massimo è espressa da:

$$\frac{\partial A}{\partial H} \cdot \frac{\partial V}{\partial R} - \frac{\partial A}{\partial R} \frac{\partial V}{\partial H} = 0 ; \quad 13)$$

si tratta dunque di formarsi dapprima questa differenza e di vedere poi per quale valore di $\frac{H}{R}$ si annulla. Trovato questo rapporto, si sostituisce nella 11), dopo di avere in essa introdotto per R (fattore esterno) il valore che se ne ricava dalla 12) e si avrà così il massimo d'attrazione in funzione del volume della piramide.

« Nel caso nostro si ha come condizione del massimo per $n$ qualunque:

$$\frac{2}{3}\,HR\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\left\{2\pi-2n.\text{arc.tg}\frac{\frac{H}{R}\,\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{\left(\frac{H}{R}\right)^2+1}}-3n\frac{\frac{H}{R}\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}{\left\{\left(\frac{H}{R}\right)^2+\cos^2\varphi\right\}\sqrt{\left(\frac{H}{R}\right)^2+1}}\right\}=0$$

e non potendo esser nullo il 1° fattore, possiamo dire che la condizione è data dal 2° fattore uguagliato a zero.

« La seguente tabella riassume i risultati ottenuti. Il rapporto fra l'altezza della piramide H ed il perimetro P è dato nella 3ª colonna, e l'ho dedotto dal rapoorto $\frac{H}{R}$ servendomi della relazione:

$$\frac{H}{P}=\frac{H}{R}\cdot\frac{1}{2n.\,\text{sen}\,\varphi}.$$

TABELLA

| $n=$ | $\frac{H}{R}=$ | $\frac{H}{P}=$ | $A_v=$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 0,3198561 | 0,0615563 | $2,083339\sqrt[3]{V}$ |
| 4 | 0,4071443 | 0,0719526 | 2,136989 » |
| 5 | 0,4461898 | 0,0759103 | 2,148407 » |
| 6 | 0,4671633 | 0,0778605 | 2,152089 » |
| 8 | 0,4878910 | 0,0796825 | 2,154281 » |
| 10 | 0,4974505 | 0,0804892 | 2,154852 » |
| ∞ | 0,5143980 | 0,0818690 | 2,155236 » |

« Quest'ultimo valore relativo al cono coincide con quello già trovato da Playfair (1) ».

(1) Playfair, *Of the solids of greatest attraction.* Transaction of the Royal Society of Edimburgh. Vol. VI, 1812, p. 187.