ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Osservazioni sui gruppi di sostituzioni fra le caratteristiche dispari di genere 3 e di genere 4.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

Matematica. — *Su di una estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Matematica. — *Sulla connessione delle superficie.* Nota di A. Tonelli, presentata dal Socio Beltrami.

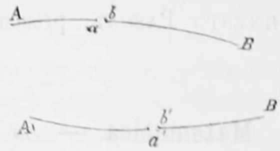
« La teoria della connessione delle superficie, se ha per iscopo principale l'applicazione che di essa si fa allo studio delle funzioni, non cessa, per questo, di formare un corpo di dottrina a sè, di indole assai generale, in cui vengono studiate certe proprietà delle superficie indipendentemente dalla loro forma ed estensione. Però, a chi ben consideri questa teoria, verrà fatto facilmente di osservare che molti teoremi non hanno quella generalità colla quale sono enunciati e molte dimostrazioni sono ben lungi dall' esser condotte con istretto rigore scientifico. Così pure alcuni concetti fondamentali non mi sembrano stabiliti con tale precisione e chiarezza da poter formare il capo saldo delle successive deduzioni. Non è però mia intenzione di far qui una rivista critica dell'intera teoria, ma solo di accennare ad un punto speciale di essa a giustificazione di quanto ho detto.

« Si dimostra che una sezione trasversa condotta tra due punti di una « medesima curva chiusa, la quale, da sè o insieme con altre, forma il con- « torno completo di una parte di superficie, aumenta di una unità il numero « dei pezzi del contorno: e lo stesso avviene se i due punti sulla curva si « riducono ad un solo, o se la sezione termina ad un punto di se stessa ».

« Di questo teorema però a me pare che non sia mai stata data una rigorosa dimostrazione, perchè tale non può certo considerarsi quella che ordinariamente si dà, e che consiste nel riprodurre, con una figura, il fatto enunciato, senza aggiungervi un ragionamento atto a provare che così e non altrimenti deve in ogni caso avvenire, e senza che il concetto di contorno, o altra condizione ad esso subordinata, comparisca nella dimostrazione come compare nell'enunciato del teorema.

« Ora io credo che la dimostrazione, per essere rigorosa, dovrebbe essere condotta nel seguente modo:

« Essendo AB, A′B′ due tratti della medesima curva chiusa C, che, da « sola o insieme con altre, forma il contorno di una parte della superficie « connessa S, sieno *a*, *b* due punti prossimi « quanto ci piace sul tratto AB, dai quali par- « tono i due margini della sezione trasversa per « terminare ai due punti *a′*, *b′*, prossimi quanto « ci piace, situati nel tratto A′B′: e propria- « mente il margine della sezione che si stacca dal punto *a* termini in *a′*, e « quello che si stacca dal punto *b* termini in *b′* ».



« Si tratta evidentemente di dimostrare, con questi dati, che muoven- « doci sulla curva C dal punto *a* nella direzione *a*A si incontra prima il « punto *a′* poi il punto *b′*, o muovendoci dal punto *b* nella direzione *b*B si « incontra prima il punto *b′* poi il punto *a′* ».

« Presentata la cosa in questo modo, che a me sembra l'unico rigoroso perchè non suppone nulla nè sulla forma della superficie S, nè sull'andamento della curva C e della sezione trasversa, è il teorema così evidente da poter fare a meno di ogni dimostrazione? Si potrà subito, con evidenza, escludere che, partendo da *a* e muovendoci nella direzione *a*A, si incontri prima il punto *b′* poi il punto *a′*?

« È vero che nello studio della connessione vengono escluse le superficie che presentano *ripiegature* o *spaccature* (o più propriamente *sfaldature* come mi consiglia di dire l'illustre prof. Beltrami), ed anche, come fa il sig. Carlo Neumann nel suo eccellente trattato *Sulle funzioni Abeliane*, parlando appunto del teorema da me accennato, le superficie *unilaterali*, cioè tali che su di esse un osservatore, partendo da un punto può, con continuità, senza mai uscire dalla superficie, tornare al punto di partenza in una posizione opposta a quella che aveva quando è partito, Queste esclusioni sono necessarie perchè su tali superficie il teorema non è più vero, come ha mostrato il sig. Neumann per la superficie di Moebius, e come si potrebbe dimostrare per tutte le superficie ideate in modo analogo. Ma l'aver fatto vedere che esistono delle superficie sulle quali il teorema non ha luogo, non toglie la necessità di dimostrare che esso non è in difetto sulle altre.

« Infatti ammesso pure che la superficie che si considera non sia unilaterale nè possegga sfaldature, non volendo fare alcuna ipotesi speciale sulla sua conformazione, una volta fissata la faccia che si prende a considerare in prossimità del tratto AB della curva C, sarà necessario fare le due ipotesi possibili circa la faccia che vi corrisponde in prossimità del tratto A′B′. Inoltre, fatta una ipotesi circa la direzione in cui si muove la sezione trasversa in partenza dai punti *a*, *b*, ad essa corrisponderanno le due ipotesi relative alla direzione in cui si muoverà nel suo giungere ai punti *a′b*.

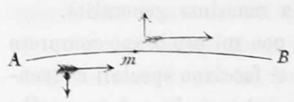
Ma le due ipotesi diverse, tanto riguardo alla faccia quanto alla direzione del movimento per la sezione trasversa, conducono a due risultati opposti quando si tratta di investigare quale dei due punti a', b' si incontra prima allorquando, partendo dal punto a o dal punto b si proceda nella direzione aA o bB respettivamente. Infatti stabilendo, come suol farsi, di percorrere la curva C in modo che la porzione di supeficie S di cui C, da sola o insieme con altre curve, forma il contorno, si trovi sempre a sinistra; quando ci si muove da a nella direzione aA corrisponderà nel tratto A′ B′, nell'una ipotesi, un movimento in un dato senso, e nell'altra ipotesi un movimento nel senso opposto. L'esclusione dunque delle superficie unilaterali non rende evidente il teorema quando si voglia conservare la massima generalità.

« Ma esistono anche altre superficie, le quali non mi sembrano comprese nelle esclusioni accennate, e sulle quali, ove non si facciano speciali convenzioni, il teorema di cui mi occupo ed altri ancora che si dimostrano nella teoria della connessione, sono in difetto.

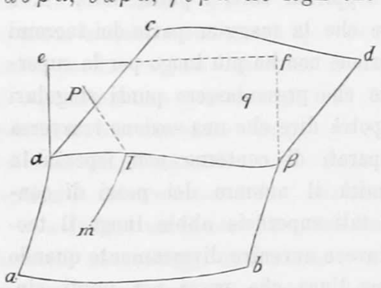
« In generale un punto sezione non toglie la connessione tra le diverse parti di una superficie connessa, e conserva a distanza piccola quanto ci piace i punti dell'intorno di quello in cui è effettuato il punto sezione. Ma se prendiamo a considerare la superficie composta delle due falde o di porzione delle due falde di un cono, considerando il vertice come un punto unico attraverso il quale si connettono le parti della superficie che formano le due falde, è chiaro che essa si spezzerà quando si scelga il vertice per effettuare il punto sezione. E se, lasciando inalterate le parti della superficie in prossimità del vertice, con opportune modificazioni, p. e. mediante una superficie generata da movimento di uno dei paralleli, si connettessero le due falde in modo da formare una superficie chiusa, il punto sezione effettuato nel vertice ridurrebbe a distanza finita dei punti che prima erano prossimi quanto si vuole. Ammesso poi che una sezione trasversa sopprima tutti i punti della curva lungo la quale è condotta, è facile vedere che la maggior parte dei teoremi che si dimostrano nella teoria della connessione non ha più luogo per la superficie ora considerata, e per tutte le altre che presentassero punti singolari come il vertice di un cono. Così non si potrà dire che una sezione trasversa condotta tra due punti di due pezzi separati di contorno non ispezza la superficie, ma solo diminuisce di una unità il numero dei pezzi di contorno, e neppure si potrà asserire che su tali superficie abbia luogo il teorema di cui mi occupo. Le cose possono invece avvenire diversamente quando la sezione trasversa sia condotta lungo una linea che passa per punti singolari analoghi al vertice del cono. La superficie che contengono tali punti debbono quiudi escludersi, quando non si facciano speciali convenzioni atte a togliere a quei punti le singolarità accennate.

« Ordinariamente i margini di una sezione trasversa condotta lungo una curva chiusa tracciata sopra una superficie, formano due curve chiuse distinte tra loro, infinitamente poco differenti dalla curva lungo la quale si è condotta la sezione. Non avviene però sempre così, e sulle superfici unilaterali esistono delle curve chiuse tali che i due margini delle sezioni condotte lungo di esse, invece di mantenersi distinti si connettono in una unica curva chiusa.

Supponiamo infatti che percorrendo una curva chiusa, la quale, come si può sempre ammettere, non incontri mai se stessa, quando si parte da un punto di essa in una data posizione rispetto alle faccie della superficie, a quello si torni nella posizione opposta. Sia $A\,m\,B$ un tratto di tale curva, e immaginiamo che un osservatore si muova sulla superficie partendo dal punto m nella direzione $m\,B$ restando vicinissimo alla curva stessa senza mai attraversarla. Se l'osservatore si è mosso avendo la curva a destra, tornerà in prossimità del punto m in questa medesima condizione; e poichè la sua posizione, rispetto alle faccie della superficie, si è invertita, sarà necessario, come si mostra nella figura, che si trovi ora dal lato della curva opposto a quello da cui è partito. Proseguendo l'osservatore nelle medesime condizioni, tornerà al vero punto di partenza dopo aver percorso due volte prima da un lato poi dall'altro un cammino vicinissimo alla curva, senza mai attraversarla. Considerando i due lati della curva come i due margini di una sezione trasversa condotta lungo di essa, è chiaro che essi si connettono in una unica curva. Il medesimo ragionamento proverebbe che se in una superficie esiste una curva chiusa tale che i due margini di una sezione trasversa condotta lungo di essa si connettono in una unica curva chiusa, la superficie stessa è *unilaterale*.



Ora una superficie con isfaldature è certamente, in qualche parte, unilaterale. Infatti consideriamo una porzione di superficie in prossimità di una curva $\alpha\,\beta$ lungo la quale si origina una sfaldatura, e accenniamo con $a\,b\,\beta\,\alpha$, $c\,d\,\beta\,\alpha$, $f\,e\,\beta\,\alpha$ tre fogli che si connettono lungo la curva. Partendo da un punto m situato nella porzione $a\,b\,\beta\,\alpha$ dalla parte in cui si trova il foglio (intermedio) $d\,c\,\alpha\,\beta$, e giungendo ad un punto l di $\alpha\,\beta$, che è comune ai tre fogli i quali si connettono lungo questa linea, è chiaro che noi potremo con continuità trasportarci a piacimento su l'uno o l'altro dei due fogli $c\,d\,\beta\,\alpha$, $e\,f\,\beta\,\alpha$ (altrimenti l'esistenza di uno di questi due fogli non avrebbe influenza sulla natura della superficie formata dagli altri due, la quale non presenterebbe più una sfaldatura e si troverebbe nelle condizioni di una superficie non soggetta ad eccezione). Supponendo allora di passare al punto p situato nel foglio $e\,f\,\alpha\,\beta$, si rende evidente che muovendo, sia da m, sia da p, ci potremo recare con continuità ad un punto q



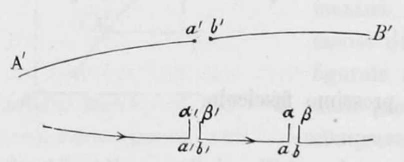
del foglio $d c \alpha \beta$, ma una volta sopra una e l'altra sulla faccia opposta. Del resto poi in qualunque modo si giungesse in p, anche senza attraversare la $\alpha \beta$, la conclusione sarebbe la stessa, potendosi in ogni caso giungere in m nella posizione inversa a quella con cui ci siamo mossi. Dunque sopra le superficie con isfaldature esisteranno curve chiuse tali che i margini delle sezioni condotte lungo di esse, si connettono in una unica curva chiusa.

« Così, senza ricorrere a distinzioni fra superficie unilaterali e bilaterali, fra superficie con e senza sfaldature, distinzione, a mio vedere, di carattere geometrico poco chiaro. basterà limitare le nostre considerazioni a quelle superficie per le quali si verifica la condizione che « i due margini delle sezioni « condotte lungo curve chiuse formano due curve chiuse distinte, che differiscono tanto poco quanto si vuole da quella lungo la quale la sezione è « condotta ».

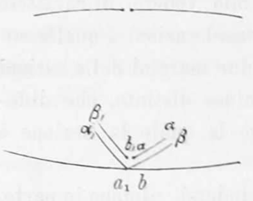
« In questo modo mi pare che vengano ad escludersi. almeno in parte, anche le superficie che presentano singolarità come quella del vertice di un cono: e propriamente quelle lungo le quali è possibile condurre curve chiuse, che passando per tali punti, penetrano nelle porzioni di superficie da essi separate. Solamente i due bordi delle sezioni condotte lungo queste curve chiuse si connettono in modo da essere percorsi in senso opposto respettivamente.

« Ora se ci limitiamo alla considerazione delle superficie che soddisfano la condizione sopra accennata, ci sarà possibile di dimostrare rigorosamente il teorema enunciato da principio.

« Riprendiamo i dati che abbiamo stabilito per la dimostrazione, e supponiamo, per fissare le idee, che, in partenza, la sezione si muova nella direzione determinata dagli elementi iniziali $a \alpha$, $b \beta$. Allora l'estremo $a' b'$ della sezione potremo spostarlo lungo la curva C, sia nella direzione verso B' sia nella direzione verso A'; e poichè la sezione non incontra la curva C che nei due punti stabiliti di partenza e di arrivo, potremo, con continuità trasportare il punto di arrivo prossimo quanto ci piace al punto di partenza, modificando il percorso della sezione, senza che mai venga ad incontrarsi.



Poichè la curva C, da sola o con altre, forma il contorno di parte della superficie è chiaro che immaginando trasportato il punto di arrivo della sezione in prossimità del punto di partenza, il tratto finale della sezione si troverà rispetto a C, dalla stessa parte del tratto iniziale, e lo rappresenteremo con $\alpha_1 a_1$, $\beta_1 b_1$. Se il movimento del punto di arrivo della sezione è avvenuto nella direzione verso B', allora il punto b_1 corrisponderà al punto b', ed il punto a_1 al punto a': l'inversa avverrebbe se il movimento si fosse effettuato nella direzione verso A'. Supponiamo che si sia effettuato il movimento nella direzione verso B' e quindi il punto b_1 corrisponda a b', e inoltre, come appare dalla figura, proseguendo nel medesimo senso s'incontri prima il punto a, poi il punto b, e quindi i margini della sezione e la curva C formino un sol pezzo invece di due; e vediamo quali conseguenze se ne deducono. Proseguendo il movimento dei punti a_1, b_1 portiamo b_1 a coincidere con a, e poi spostiamo verso l'interno della porzione di superficie limitata da C questo punto, e avviciniamo i punti a_1, b, e vediamo che cosa è avvenuto dei due margini della sezione così modificata. Partendo da b e muovendoci lungo il tratto $b\beta$ giungeremo con continuità a percorrere il tratto $\beta_1 b_1$ che si connette col tratto $a\alpha$, il quale con continuità ci porterà al tratto finale $\alpha_1 a_1$, che si connette col tratto iniziale $b\beta$; e quindi nella superficie esisterebbe una curva chiusa tale che i margini della sezione condotta lungo di essa si connettono in una sola curva. Ciò non è possibile sulla nostra superficie e quindi non è possibile che partendo da b' nella direzione $b'B'$ s'incontri prima a poi b, e ciò è quanto si doveva dimostrare.



« Il caso in cui la sezione trasversa termina al medesimo punto di partenza è quello stesso al quale abbiamo riportato il caso più generale ora considerato.

« Finalmente se la sezione termina ad un punto di se stessa, poichè essa può immaginarsi composta da due sezioni trasverse, una delle quali condotta lungo una curva chiusa, e l'altra fra punti di due pezzi separati di contorno, risulta subito evidente il teorema sulle superficie che ci siamo limitati a considerare, e solo, in generale, su queste ».

Matematica. — *Dei sistemi di coordinate atti a ridurre la espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie alla forma* $ds^2 = (U + V)\,(du^2 + dv^2)$. Nota del prof. G. Ricci, presentata dal Socio Beltrami.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Collegamento della specola geodetica di S. Pietro in Vincoli cogli Osservatori astronomici del Collegio Romano e Campidoglio.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.