ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

MDCIII

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Sulla configurazione dei 120 piani tritangenti della sestica storta di genere 4.* Nota I di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

« In alcune Note che ho avuto il piacere di presentare a cotesta Accademia, ho esplicato in che maniera sarei passato allo studio della configurazione dei piani tritangenti della sestica storta di genere 4. In questa Nota comincio appunto questo studio che è la estensione di quello da me già fatto per la curva piana di 4° ordine.

§ 1. — Preliminari.

« Dalle cose dette nel § 15 della mia Mem. I pubblicata nel vol. XX degli Annali di Matematica, risulta che esistono, nella rappresentazione delle caratteristiche di genere 4 mediante i sistemi di Noether, quattro tipi diversi di quaterne-zero, cioè di assiemi di quattro caratteristiche la cui somma è lo zero assoluto.

« Questi quattro tipi di figure sono rappresentati dalla fig. 19$^{\text{ma}}$ annessa alla Mem. citata, e ve ne sono rispettivamente:

$$\frac{70.216}{4}\,,\ 70.180\,,\ \frac{70.540}{4}\,,\ \frac{70.360}{4}$$

di ciascuno dei tipi, e quindi in tutto vi sono

$$7.10.27.17 = 32130$$

quaterne-zero. Tre dei piani di una tal quaterna, formano una superficie di contatto alla sestica storta, e la caratteristica del sistema di questa superficie di contatto è la medesima di quella corrispondente al quarto piano della quaterna, e quindi per un teorema noto (1), i 12 punti di contatto dei quattro piani tritangenti della quaterna-zero stanno su di una stessa quadrica.

« Possiamo dunque dire che i 360 punti di contatto della sestica storta coi suoi 120 piani tritangenti stanno a dodici a dodici su 32130 quadriche che potremo chiamare *coordinate* alla sestica storta.

« È chiaro che se due di quelle quadriche si incontrano in un punto della sestica, questo non potrà essere che uno dei 360 punti di cui si è parlato, e anche qui diremo, per brevità, che due di quelle quadriche *si incontrano* quando hanno in comune punti della sestica, e diremo che *non si incontrano*, ovvero che *sono esterne l'una all'altra* quando ciò non avviene.

(1) Vedi Noether, *Ueber die invariante Darstellung* etc. Math. Ann. XVII, § 6.

« È facile vedere che vi sono $\frac{32130.4}{120} = 7.9.17$ quaterne-zero aventi tutte uno stesso piano comune, e seguendo l'ordine di idee di una Nota già pubblicata in questi stessi Rendiconti, possiamo dire che queste 1071 quaterne rappresentano la estensione dei 45 piani tritangenti della superficie di 3° ordine.

« Il gruppo delle sostituzioni di monodromia che lascia fissa una delle quadriche ha per ordine $9.5.8^5$.

« Rispetto ad una delle quadriche ve ne sono 156 altre aventi colla data 6 punti di comune (s'intende, sulla sestica), $128.31 = 3968$ aventi colla data 3 punti comuni, e finalmente 28005 tutte *esterne* alla data.

« Noi ci proponiamo qui di studiare gli assiemi di quadriche *esterne* l'una all'altra, e le proprietà geometriche delle varie specie di assiemi.

§ 2. — Sottogruppo S′ di monodromia che lascia inalterata una quadrica.

« Ci si incomincia qui a presentare una differenza fondamentale fra il genere 3, già da noi studiato, e il genere 4 che studiamo ora. Mentre pel genere 3 il sottogruppo di monodromia, che lascia inalterata una quaterna-zero, è transitivo nelle 24 caratteristiche dispari rimanenti, qui invece l'analogo sottogruppo non è più transitivo nelle 116 caratteristiche restanti.

« Vediamo da che cosa dipende questo fatto. Nel genere 3 consideriamo una quaterna-zero $a\,b\,c\,d$. Ogni altra caratteristica c' formerà sempre terna dispari *con una sola* delle tre coppie ab, bc, ac; così se p. es. abc' è una terna dispari, saranno certamente pari le terne bcc', acc'. E propriamente le 24 caratteristiche restanti si scindono in tre gruppi $8+8+8$, ognuno corrispondente in tal maniera ad una di quelle coppie. Pel genere 4 troveremo invece che la cosa procede diversamente.

« Consideriamo la quaterna-zero (secondo la nostra solita rappresentazione)

$$a \equiv (123) \quad b \equiv (134) \quad c \equiv (145) \quad d \equiv (152)$$

Esaminiamo quanti piani formano terna dispari colla coppia ab.

« Tali piani sono evidentemente dei tipi:

$$(253) \quad (21i) \quad (2ij) \quad (435) \quad (41i) \quad (4ij)$$
$$(23i) \quad (25i) \quad (43i) \quad (45i)$$

dove i, j, sono due numeri scelti fra i numeri 6, 7, 8, 9, 10.

« Si vede che in tutto questi piani sono $32+20=52$; ma però possiamo subito riconoscere una differenza fondamentale fra quelli scritti in prima linea e quelli scritti in seconda linea, inquantochè i primi sono sempre tali che colle altre due coppie bc, ac danno terne pari, mentre i secondi danno ancora terne dispari. Si capisce allora che vi debbono essere altri 32 piani diversi da questi e che danno terne dispari solo con bc, e così altri 32 che danno terne dispari solo con *ac*. In tutto si avranno allora $3.32 + 20 = 116$ piani che sono precisamente tutti i restanti.

« Possiamo dunque intanto conchiudere:

« *Data una quaterna-zero* $abcd$, *vi sono 32 piani che fanno terna*
« *dispari colla* sola *coppia* ab *(e quindi anche con* cd*); 32 altri che*
« *fanno terna dispari solo con* bc *(e quindi anche con* ad*) e 32 altri*
« *che fanno terna dispari solo con* ac *(e quindi con* bd*) e vi sono poi 20*
« *piani che fanno terna dispari con* tutte *le coppie contenute nella*
« *quaterna* ».

« Si capisce quindi che il sottogruppo di monodromia deve separare i 96 piani dagli altri 20, e inoltre i primi 96 li deve ancora scindere in tre sistemi d'imprimitività corrispondenti alle tre paia di coppie della quaterna.

« Costruiamo il quadro dei $96 + 20$ piani, i primi divisi in tre sistemi d'imprimitività. Esso è:

$$\left.\begin{array}{lllllll} 124.153 & , & 24i.35i & , & \ldots\ldots & , & 1ij.hkl \quad , \quad \ldots\ldots \\ 253.453 & , & 21i.41i & , & \ldots\ldots & , & 2ij.4ij \quad , \quad \ldots\ldots \\ 254.423 & , & 31i.51i & , & \ldots\ldots & , & 3ij.5ij \quad , \quad \ldots\ldots \end{array}\right\} (A)$$

dove i, j, h, k, l hanno solo i valori 6, 7, 8, 9, 10.

« Inoltre il quadro dei 20 piani è:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} 236 & . & 237 & . & 238 & . & 239 & . & 2310 \\ 456 & . & 457 & . & 458 & . & 459 & . & 4510 \\ 436 & . & 437 & . & 438 & . & 439 & . & 4310 \\ 256 & . & 257 & . & 258 & . & 259 & . & 2510 \end{array}\right\} (B)$$

« Nel 1° quadro i piani che sono accoppiati sono quelli che formano quaterne-zero rispettivamente con *ac*, *ab*, *bc* (secondochè si tratta della 1ª, 2ª, 3ª linea), e nel 2° quadro un piano della prima linea insieme al corrispondente della seconda, forma quaterna-zero con *ac*, ovvero uno della prima col corrispondente della 3ª, forma quaterna-zero con *ab*, e così di seguito.

« Possiamo ora far vedere che il sottogruppo che stiamo considerando:

« 1) è transitivo nei 32 piani di ciascuno dei tre sistemi d'imprimitività, e quindi è transitivo in tutti i 96 piani.

« 2) è transitivo contemporaneamente nei 32 piani di un sistema d'imprimitività, e nei 32 piani di un altro, o, ciò che è lo stesso, se lasciamo fisso uno dei piani di un sistema possiamo poi disporre in modo arbitrario della trasformazione di un altro piano di un altro sistema.

« Questi teoremi si dimostrano facilmente tenendo presenti le considerazioni sviluppate nel § 23 della Mem. I già citata.

« Vogliamo p. es. mostrare che esistono sostituzioni che mutano il piano

(124) in (246). Allora consideriamo il sistema completo di caratteristiche dispari:

$$123\ .\ 124\ .\ 125\ .\ 126\ .\ 127\ .\ 128\ .\ 129\ .\ 1210\ , \quad q=1 \quad q'=2.$$

« I tre primi piani debbono diventare rispettivamente:

$$123\ .\ 246\ .\ 125$$

mentre poi la sostituzione deve essere tale che trasformi in sè stesso il piano (134), e ciò porta che deve essere $q=6$.

« Onde dobbiamo vedere se esiste un sistema completo di quelli da noi già calcolati nella Mem. I, tale che contenga i tre piani 123 . 246 . 125, e una delle due caratteristiche pari basi sia $q=6$. Esaminando le figure della tavola IV della citata Memoria si trova che p. e. la fig. 29ª soddisfa a queste condizioni scambiandovi opportunamente le denominazioni dei punti. In analoga maniera si procederebbe in ogni altro caso.

« Così per la dimostrazione del 2° teorema dobbiamo far vedere che si possono soddisfare contemporaneamente le seguenti condizioni; che p. es. i piani:

$$123\ .\ 124\ .\ 125\ \mid\ 134\ .\ 253$$

diventino rispettivamente:

$$134\ .\ 124\ .\ 145\ \mid\ 123\ .\ 216$$

« Adoperando il sistema completo di sopra si vede che ciò porta che q, q' debbono trasformarsi in $q=1$, $q'=(12356)$, e la quistione si riduce a ricercare fra le figure della tavola IV della Mem I una nella quale esistano i piani 123 . 124 . 125, mentre le caratteristiche fondamentali sieno $q=1$, $q'=(12356)=(478910)$ e si vede che la fig. 27ª soddisfa a queste condizioni con opportune trasformazioni di punti.

« Il numero delle sostituzioni che lasciano fissi i tre sistemi d'imprimitività sarà evidentemente $3\ .\ 5\ .\ 4\ .\ 8^4$, e il numero di quelle che lasciano fisso anche un piano del primo sistema sarà allora $3\ .\ 5\ .\ 8^3$, mentre quelle che lasciano fisso un piano del primo sistema e uno del secondo saranno $3\ .\ 5\ .\ 16$; e se più generalmente nel secondo sistema non vogliamo che sia fisso un piano, ma solo *una delle 16 coppie di piani* allora l'ordine diventa il doppio cioè $3\ .\ 5\ .\ 32$.

« Ora noi ci proponiamo qui di far vedere che, per la speciale scelta che facciamo dei piani fissi, queste sostituzioni si possono costruire e rappresentare in un modo molto facile.

« Effettivamente in primo luogo fra i quattro punti 2, 3, 4, 5 possiamo fare le quattro sostituzioni:

$$g=[1\ , (24)\ , (35)\ , (24)(35)]$$

per le quali evidentemente la quadrica data resta fissa, e inoltre resta fisso il piano (124) del 1° sistema, e la coppia (253) (453) del 2° sistema resta anche fissa. Inoltre per le 5! sostituzioni fra i cinque altri punti 6, 7, 8, 9, 10, evidentemente si ha il medesimo effetto, e quindi abbiamo in tutto costruite 4 . 5! sostituzioni per le quali resta fissa la quadrica, un piano del 1° sistema, e una coppia del 2°. Ma abbiamo già visto che proprio in tal numero debbono essere le sostituzioni che producono questo effetto, dunque le abbiamo costruite tutte.

« Di qui ne ricaviamo subito i teoremi:

« 3) Il sottogruppo S''' che lascia fisso un piano di un sistema e una coppia di un altro (e quindi i tre sistemi) lascerà fissa una coppia del 3° sistema.

« 4) Il medesimo sottogruppo non è più transitivo nelle altre coppie di ciascuno dei sistemi (come succedeva pel genere 3) ma separa le altre 15 coppie in $5 + 10$, essendo transitivo in ciascuna di queste due classi.

« 5) Il medesimo sottogruppo è transitivo nei 20 piani della tabella (B).

§ 3. — Sottogruppo S'' che lascia fissa la quadrica e un piano dei tre sistemi d'imprimitività.

« La proprietà contenuta nel n. 4 del § precedente ha una natura più generale; essa cioè non è una proprietà solo del sottogruppo che oltre lasciar fisso un piano lascia fissa anche una coppia d'un altro sistema, ma è una proprietà addirittura del sottogruppo che lascia fisso solamente un piano, cioè noi ora dimostreremo che:

« 6) Il sottogruppo S'' che oltre lasciar fissa la quadrica, lascia fisso un piano di uno dei tre sistemi d'imprimitività (uno dei 96) o una coppia, scinde le altre 15 coppie del medesimo sistema in $10 + 5$.

« Si vede allora che il teorema 4) non è che una conseguenza dei due teoremi 3), 6).

« Prima di tutto l'ordine di S'' è: $\frac{9.5.8^5}{96} = 15.2.8^3$. Cercheremo di costruire tutte queste sostituzioni, e questa costruzione la scinderemo in tre parti; costruiremo prima le 16.5! sostituzioni che lasciano fisso anche ciascuno dei quattro piani della quaterna fondamentale, poi faremo permutare fra loro questi 4 piani colle 4 sostituzioni, tali che restino fissi i tre sistemi d'imprimitività, e finalmente faremo scambiare fra loro i due ultimi sistemi d'imprimitività (il 1° resta sempre fisso, perchè resta fisso un piano in esso contenuto).

« Sappiamo che le sostituzioni le possiamo rappresentare completamente come trasformazioni di sistemi completi di Noether in altri sistemi completi (§ 23, Mem. I).

« Consideriamo il sistema completo:

$$\underset{\alpha}{132} \, . \, \underset{\beta}{134} \, . \, \underset{\gamma}{135} \, . \, \underset{\delta}{136} \, . \, \underset{\varepsilon}{137} \, . \, \underset{\zeta}{138} \, . \, \underset{\eta}{139} \, . \, \underset{\omega}{1310} \quad , \quad q = 1 \quad q' = 3$$

Lasciamo fissi i tre primi piani. Si vede subito che la base q deve restare anche fissa, perchè si ha:

$$(132) + (135) + (1) = (125)$$

e (125) è un piano della quaterna fondamentale e quindi deve star fisso.

« Quindi il sistema completo di sopra dovrà trasformarsi in un altro che possegga tre piani passanti per una retta, e una delle basi sia rappresentata da uno degli estremi di questa retta. Dalle figure annesse alla Mem. I si vede che non sono possibili che solo i tipi rappresentati dalle fig. 24ª, 27ª, 28ª di cui se ne possono costruire rispettivamente (aventi i 3 piani (132) (134) (135)) 1, 5, 10, cioè in tutto 16. Gli altri 5 piani poi dei sistemi completi possono farsi corrispondere in 5! modi ai rimanenti cinque piani del sistema dato, e quindi si ottengono allora in tutto proprio le 16. 5! sostituzioni richieste.

« Ora si può far vedere che per tutte queste sostituzioni, il piano (356) non può mai trasformarsi p. e. in (167) o in (8910).

« Infatti evidentemente:

$$(356) = \gamma + \delta + q'$$

e quindi chiamando rispettivamente con:

$$\alpha_1 \; \beta_1 \; \gamma_1 \; \delta_1 \; . \; . \; . \; q_1 \; q'_1$$

le caratteristiche del sistema trasformato, dovrebbe essere:

$$(167) = \gamma_1 + \delta_1 + q'_1$$

ed essendo:

$$\gamma_1 = \gamma = (135)$$

dovrebbe essere:

$$\delta_1 + q'_1 = (3567) = (1248910)$$

ovvero nell'altro caso:

$$\delta_1 + q'_1 = (1358910) = (2467)$$

« Ora p. es. per la fig. 27ª il piano δ_1 non può essere che delle seguenti forme:

$$(245)$$

ovvero: $(3ij) \qquad i, j, = 6, 7, 8, 9, 10$

e quindi ponendo questi valori nelle eguaglianze di sopra, e ricavando poi il valore di q'_1, si trova sempre che per q'_1 risulta o una caratteristica dispari, ovvero una pari, ma che rispetto ai piani del sistema completo non è disposta come deve essere nella fig. 27^a, e quindi è impossibile. In modo simile si procederebbe per tutti gli altri casi.

« Possiamo ora osservare che se noi a queste 16.5 ! sostituzioni riuniamo le quattro g del paragrafo precedente, abbiamo tutte le 4.16.5 ! sostituzioni per le quali restando fisso un piano, e fissi i tre sistemi d'imprimitività non restano però fissi i quattro piani della quaterna, e per queste sostituzioni g evidentemente il piano (356) non potrà trasformarsi in (167).

« Resta finalmente a costruire un'ultima sostituzione per la quale si scambiino i due ultimi sistemi d'imprimitività.

« Basta permutare i piani del sistema completo precedente rispettivamente in quelli del sistema completo (v. fig. 28^a, Mem. I):

$$\underset{\alpha_1}{145} \,.\, \underset{\beta_1}{134} \,.\, \underset{\gamma_1}{135} \,.\, \underset{\delta_1}{126} \,.\, \underset{\varepsilon_1}{127} \,.\, \underset{\zeta_1}{128} \,.\, \underset{\eta_1}{129} \,.\, \underset{\omega_1}{1210} \quad q_1 = (12345) \quad q'_1 = (2)$$

Questa sostituzione pure scambiando i due ultimi sistemi d'imprimitività, perchè scambia fra loro i due piani a, c della quaterna fondamentale, lascia inalterato il piano (356). Con ciò il teorema 6) resta dimostrato.

« Dalle considerazioni fatte possiamo ricavare anche alcune altre cose. Per effetto dell'ultima sostituzione si vede che il piano (167) diventa (8910); e inoltre l'altra sostituzione che muta il primitivo sistema completo in:

$$\underset{\alpha_2}{145} \,.\, \underset{\beta_2}{134} \,.\, \underset{\gamma_2}{135} \,.\, \underset{\delta_2}{276} \,.\, \underset{\varepsilon_2}{345} \,.\, \underset{\zeta_2}{278} \,.\, \underset{\eta_2}{279} \,.\, \underset{\omega_2}{2710} \quad q_2 = (12345) \quad q'_2 = 628910$$

mentre lascia inalterato il piano (124), ed (167), muta il piano (246) in (356), e quindi possiamo dedurre:

« 7) Nel sottogruppo S'' esistono sostituzioni che scambiano fra loro i due piani di ciascuna delle $5 + 10$ coppie del 1° sistema d'imprimitività.

« Dopo questi studî preliminari possiamo passare alla classificazione delle varie specie di coppie di quadriche, colle proprietà geometriche che caratterizzano ciascuna coppia, e questo lo faremo in una prossima Nota ».

Matematica. — *Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4.* Nota II di E. Pascal, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.