ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Sulla superficie del 4° ordine a conica doppia.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« In questa Nota è trattata la superficie del 4° ordine a conica doppia come superficie fondamentale di un connesso punto-piano (1, 2) specializzato, e come superficie polare congiunta rispetto ad un connesso piano-retta (2,2) e ad una quadrica. È inoltre costruita, la superficie, per forme proiettive (¹).

§ I.

« 1. Un connesso punto-piano (1, 2) specializzato in modo da avere una sviluppabile di 3ª classe di piani singolari, decomposta in un fascio di 2° ordine di una stella (E) ed in un fascio di 1° ordine (r), può essere con una conveniente sostituzione lineare ridotto alla forma

$$\varphi_{xu} \equiv p_x (u_\beta u_{\gamma'} - u_{\beta'} u_\gamma) + u_\alpha (r_x u_\delta - q_x u_\varepsilon) = 0 \qquad (1)$$

ove $u_\alpha = 0$ è l'equazione di E, $u_\beta u_{\gamma'} - u_{\beta'} u_\gamma = 0$ quella di una quadrica cui appartengono il fascio di 2° ordine e quello di 1° ordine; ed ove si ha, per $i = 1, \dots, 4$:

$$\beta_i' - \beta_i = \delta_i\,, \qquad \gamma'_i - \gamma_i = \varepsilon_i\,. \qquad (2)$$

Allora il connesso ha anche un punto singolare: il punto $\xi_i \equiv (pqr)_i$ $(i=1, \dots, 4)$ comune ai piani $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$.

« Per mezzo di φ_{xu}, e per essere

$$t_{x+\xi} = t_x + t_\xi = t_x + (tpqr) = t_x$$
$$(t \equiv p, q, r)$$

ai punti di una stessa retta, uscente da ξ, corrisponde sempre lo stesso iperboloide; si può, dunque, ritenere la (1) come riferente fra loro le rette di ξ, e le quadriche inscritte nella sviluppabile $(E) + (r)$; così, per ogni retta si ha una quadrica, e per ogni quadrica una retta, e questa corrispondenza è proiettiva, perchè ponendo

$$x_i = \xi_i + \lambda y_i + \mu z_i \qquad (i = 1, \dots, 4)$$

si ha:

$$t_x = t_{\xi + \lambda y + \mu z} = \lambda t_y + \mu t_z \qquad (t \equiv p, q, r)\,;$$

e quindi, mentre x descrive il piano ξyz, la quadrica corrispondente varia nella schiera

$$\lambda \varphi_{yu} + \mu \varphi_{zu} = 0.$$

(¹) Per uno studio elaborato intorno alle superficie del 4° ordine a conica doppia, e per le notizie storiche intorno alle medesime, si può consultare la dotta Memoria del Segre ins. nei Math. Ann, 1884. Come lavori più recenti si hanno una Memoria del sig. Berzolari, pubblicata negli Annali di Mat. del 1884, ed una traduzione italiana (del sig. Loria) di una Memoria dello Zeuthen pubblicata nel 1879 in occasione delle feste pel centenario dell'Università di Copenaghen (Ann. di Mat. an. 1884). Vi è anche una Nota del Cosserat sulla Ciclide di Dupin, ma è di geometria infinitesimale. (Annales de Toulouse, 1892).

« Noi indicheremo con (T) la rete tangenziale delle quadriche inscritte nella sviluppabile, e con (P) la stella di centro ξ; e possiamo allora dire, in virtù dei risultati precedenti, che tanto è considerare la superficie fondamentale di φ_{xu}, quanto considerare la superficie luogo delle intersezioni delle quadriche di (T) colle corrispondenti rette di (P).

« L'equazione della superficie fondamentale di φ_{xu} si trova soddisfacendo insieme alle equazioni di polarità

$$\sigma x_i = \frac{\partial \varphi_{xu}}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

ed all'equazione d'incidenza

$$u_x = 0;$$

ponendo perciò

$$\beta_i \gamma'_k - \beta'_i \gamma_k + \beta_k \gamma'_i - \beta'_k \gamma_i = A_{ik} \tag{3}$$

$$\delta_k r_x - \varepsilon_k q_x = h_x^{(k)} \tag{4}$$

per tutti i valori di i, k da 1 a 4, tale equazione sarà:

$$\begin{vmatrix} A_{11} p_x + \alpha_1 h_x^{(1)} + \alpha_1 h_x^{(1)} & A_{12} p_x + \alpha_2 h_x^{(1)} + \alpha_1 h_x^{(2)} & A_{13} p_x + \alpha_3 h_x^{(1)} + \alpha_1 h_x^{(3)} & A_{14} p_x + \alpha_4 h_x^{(1)} + \alpha_1 h_x^{(4)} & x_1 \\ A_{21} p_x + \alpha_1 h_x^{(2)} + \alpha_2 h_x^{(1)} & A_{22} p_x + \alpha_2 h_x^{(2)} + \alpha_2 h_x^{(3)} & A_{23} p_x + \alpha_3 h_x^{(2)} + \alpha_2 h_x^{(3)} & A_{24} p_x + \alpha_4 h_x^{(2)} + \alpha_2 h_x^{(4)} & x_2 \\ A_{31} p_x + \alpha_1 h_x^{(3)} + \alpha_3 h_x^{(1)} & A_{32} p_x + \alpha_2 h_x^{(3)} + \alpha_3 h_x^{(3)} & A_{33} p_x + \alpha_3 h_x^{(3)} + \alpha_3 h_x^{(3)} & A_{34} p_x + \alpha_4 h_x^{(3)} + \alpha_3 h_x^{(4)} & x_3 \\ A_{41} p_x + \alpha_1 h_x^{(4)} + \alpha_4 h_x^{(1)} & A_{42} p_x + \alpha_2 h_x^{(4)} + \alpha_4 h_x^{(2)} & A_{34} p_x + \alpha_3 h_x^{(4)} + \alpha_4 h_x^{(3)} & A_{44} p_x + \alpha_4 h_x^{(4)} + \alpha_4 h_x^{(4)} & x_4 \\ x_2 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

« Questa è del 5° grado, ma è facile vedere che da essa si stacca il fattore $p_x = 0$. Ponendo, in fatti, $p_x = 0$ tale equazione dà identicamente:

$$\Sigma \mathfrak{H}_{ik} x_i x_k = 0$$

ove $\mathfrak{H}_{ik}$ è il minore complementare dell'elemento $\alpha_i h_x^{(k)} + \alpha_k h_k^{(i)}$ nel determinante $|\alpha_i h_x^{(k)} + \alpha_k h_x^{(i)}|$, poichè è identicamente:

$$\mathfrak{H}_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \alpha_a h_x^{(b)} + \alpha_b h_x^{(a)} & \alpha_e h_x^{(b)} + \alpha_b h_x^{(e)} & \alpha_f h_x^{(b)} + \alpha_b h_x^{(f)} \\ \alpha_a h_x^{(c)} + \alpha_c h_x^{(a)} & \alpha_e h_x^{(c)} + \alpha_c h_x^{(e)} & \alpha_f h_x^{(c)} + \alpha_c h_x^{(f)} \\ \alpha_a h_x^{(d)} + \alpha_d h_x^{(a)} & \alpha_e h_x^{(d)} + \alpha_d h_x^{(e)} & \alpha_f h_x^{(d)} + \alpha_d h_x^{(f)} \end{vmatrix} = 0$$

iaef, *kbcd* essendo due permutazioni qualunque dei numeri 1, ..., 4 ([1]). L'equazione residuale assume la forma

$$\mathfrak{D} \,.\, p_x^2 + \mathfrak{G} \,.\, p_x + \mathfrak{F} = 0;$$

e questa rappresenta perciò una superficie del 4° ordine con un punto doppio in P, poichè le coordinate ξ_i di P, mentre annullano p_x, annullano a

([1]) La proprietà che dalla (5) si stacca il piano $p_x = 0$ risulta, del resto, anche dal ragionamento seguente. Per mezzo della (1) al piano $p_x = 0$ corrispondono tutti i piani delle due stelle $u_\alpha = 0$, $r_x u_\delta - q_x u_\varepsilon = 0$, la prima delle quali è fissa, e la seconda ha il centro variabile, su r, con x; ogni retta di E taglia perciò $p_x = 0$ in un punto che può essere assunto come punto della superficie fondamentale di φ_{xu}; da cui segue la verità dell'asserto.

1° grado $\mathfrak{E}$ ed a 2° grado $\mathfrak{F}$. Vedremo subito che questa superficie possiede una conica doppia.

§ II.

« 2. Poichè prendendo tre punti a_i, b_i, c_i $(i=1,\ldots,4)$ sulle tre costole $\overline{qr}$, $\overline{rp}$, $\overline{pq}$ del triedro dei piani $p_x=0$, $q_x=0$, $r_x=0$ si ha

$$p_x \equiv (bc\xi x) = \mathfrak{J}_1\,, \quad q_x \equiv (ca\xi x) = \mathfrak{J}_2\,, \quad r_x \equiv (ab\xi x) = \mathfrak{J}_3\,,$$

noi possiamo nell'equazione (5), e, quindi, per ciò stesso nell'equazione (7), al posto delle p_x, q_x, r_x sostituire ordinatamente $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$. Rimpiazzando allora anche le $x_1,\ldots,x_4$ con le $u_1,\ldots,u_4$, con che le $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ diventano di 0°, 1°, 2° grado nelle $\mathfrak{J}$, e di 2° grado nelle u, l'equazione (7) fornisce l'equazione:

$$\mathrm{D}\,.\,\mathfrak{J}_1^2+\mathrm{E}\,.\,\mathfrak{J}_1+\mathrm{F}=0 \tag{8}$$

dove le D, E, F sono le $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ di prima modificate nel modo detto. Ne segue, non tenendo più fisso ora il punto ξ_i, ma considerando la (8) come un'equazione fra le u e le coordinate della retta $\overline{\xi x}$ che appariscono nella (8) per le sostituzioni

$$\mathfrak{J}_1=\Sigma\,(bc)_{ik}\,p_{lm}\,, \quad \mathfrak{J}_2=\Sigma\,(ca)_{ik}\,p_{lm}\,, \quad \mathfrak{J}_3=\Sigma\,(ab)_{ik}\,p_{lm}\,, \tag{α}$$

che la (8) medesima rappresenta un connesso piano-retta (2, 2). Prendendo, rispetto a questo connesso, e rispetto alla quadrica

$$\sum_1^4 x_i^2=0 \tag{9}$$

la superficie polare congiunta, siccome le u della (8) devono venire rimpiazzate con le x corrispondenti, si ricadrà sull'equazione (7), che noi ora manterremo scritta nella forma

$$\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{J}_1^2+\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{J}_1+\mathfrak{F}=0. \tag{7'}$$

« Ne concludiamo che la superficie del 4° ordine data dalla (7), oltre ad essere fondamentale pel connesso (1) ed al provenire per mezzo della rete (T) e della (P) proiettivamente ad essa riferita, proviene anche come superficie polare congiunta rispetto al connesso (8) ed alla quadrica (9).

« Segue da questo che il luogo delle tangenti in P alla superficie ha per equazione la stessa equazione (7′) quando, cambiando le x nelle ξ, e viceversa, si mantengono fisse le ξ e variabili le x. Questo luogo si compone di una coppia di piani, in generale distinti, poichè è zero, coi suoi minori del 3° ordine, e non con quelli del 2°, il determinante delle 4 equazioni lineari:

$$(2\mathfrak{D}\mathfrak{J}_1+\mathfrak{E})\frac{\partial\mathfrak{J}_1}{\partial x_i}+\mathfrak{J}_1\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial x_i}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,\ldots,4).$$

« Il punto P ha, dunque, una coppia di piani polari congiunti; e poichè una superficie polare congiunta è luogo di punti i cui coni polari congiunti passano pel punto, sulla superficie esisterà un luogo di punti le cui coppie di piani congiunti passano tutte per P; e questo luogo è una conica poichè le rette comuni ai piani delle diverse coppie sono in un piano. *La superficie del 4° ordine che stiamo studiando è*, adunque, *a conica doppia*.— Questa proprietà risulta, del resto, anche dalla relazione proiettiva fra le rette di (P) e le quadriche di (T); poichè, essendo a base di (T) una sviluppabile decomposta (E) + (r), di (T) fanno parte tutti i piani di (r) ciascuno considerato come doppio. Trovando, perciò, le rette di (P) che corrispondono ai piani di (r) nella (T) $\overline{\wedge}$ (P), queste saranno anch'esse in un piano, e ciascuna incontrerà il piano corrispondente in un punto, che, come ritroveremo in base ad altre considerazioni, è doppio per la superficie e genera una conica che passa per P ed è appoggiata ad r.

§ III.

3. La equazione (1), può essere scritta nella forma

$$\mathfrak{J}_1 (u_\beta u_{\gamma'} - u_{\beta'} u_\gamma) + \mathfrak{J}_2 (u_\alpha u_\gamma - u_\alpha u_{\gamma'}) + \mathfrak{J}_3 (u_\alpha u_{\beta'} - u_\alpha u_\beta) = 0; \quad (1')$$

ne segue che, tanto è considerare il connesso φ_{xu}, quanto considerare il sistema simultaneo delle equazioni

$$\left.\begin{aligned} (\sigma) &\equiv \lambda u_\alpha + \mu u_\beta + \nu u_\gamma = 0 \\ (\sigma') &\equiv \lambda u_\alpha + \mu u_{\beta'} + \nu u_{\gamma'} = 0 \\ (\mathrm{P}) &\equiv \lambda \mathfrak{J}_1 + \mu \mathfrak{J}_2 + \nu \mathfrak{J}_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ove λ, μ, ν sono parametri variabili; cioè, le scambievoli relazioni poste per mezzo della (1) o (1′) fra le x e le u sono le medesime di quelle poste dalla simultaneità delle equazioni (10) per tutte le possibili terne di valori delle λ, μ, ν.— Ora, le (10) definiscono un'omografia Ω fra i piani (σ), (σ') ed una reciprocità R fra questi piani e la stella (P); la Ω ha un punto unito in $\mathrm{E} \equiv u_\alpha = 0$, senza avere unita la retta $\sigma\sigma' \equiv s \equiv t'$, ed i piani che congiungono rette corrispondenti in Ω sono precisamente i piani del fascio di 2° ordine (E), e quelli del fascio di 1° ordine (r). Quelle congiunte dai piani di (E) passano per E, e sono punteggiate prospettivamente, il centro di prospettiva essendo su r; quelle congiunte dai piani di (r) passano, in vece, pei punti $r.(\sigma, \sigma') \equiv \mathrm{S}, \mathrm{S}'$, e fra esse non sono punteggiate prospettivamente che le ES, ES′. I piani σ, σ' di (E) congiungono le rette tt', ss' i cui centri di prospettiva sono ordinatamente S, S′.— La reciprocità R è generale.

Per mezzo di Ω è individuato un sistema di rette del 2° ordine e 1ª classe Γ, i cui iperboloidi sono gli iperboloidi del connesso φ_{xu}, e contengono tutti per direttrice la r. Prendendo uno di questi, e prendendo la retta che per mezzo di (T) $\overline{\wedge}$ (P) gli corrisponde in (P), per questa retta passeranno due piani i quali corrispondono in R ai punti di (σ), (σ') nei quali σ, σ' vengono tagliati dai raggi di Γ che sono generatrici dell'iperboloide, e passano pei suoi punti d'incontro colla retta. Un punto, dunque, della superficie del 4° ordine che stiamo studiando, si trova anche alla intersezione di un raggio di Γ, e del piano che per mezzo di Ω ed R gli viene a corrispondere in (P); vale a dire che noi possiamo dare l'enunciato seguente: Oltre ai precedenti modi di generazione, la superficie ne ammette un quarto: essa può essere costruita come luogo delle intersezioni degli elementi corrispondenti di un sistema di rette di 2° ordine e 1ª classe e di una stella di piani ad esso proiettivamente riferita.

« Quest'ultimo modo di generazione conduce subito a varie interessanti conseguenze, di cui ne metteremo in rilievo qualcuna nel paragrafo seguente.

§ IV.

« 4. Su un raggio di Ω un punto ha per coordinate espressioni della forma:

$$z_i \equiv \lambda\alpha_i(\varrho+\varrho')+\mu(\varrho\beta_i+\varrho'\beta_i')+\nu(\varrho\gamma_i+\varrho'\gamma'_i) \qquad (11)$$
$$(i=1,\dots,4)$$

perciò, se s' indica con M_χ l' invariante simultaneo della retta $\xi_\chi\ (\chi\equiv\alpha,\beta,\gamma)$ e della retta $M\equiv(A\equiv bc,\ B\equiv ca,\ C\equiv ab)$, e si pone

$$\mathfrak{F}=A_\alpha.\lambda^2+B_\beta.\mu^2+C_\gamma.\nu^2+(A_\beta+B_\alpha)\lambda\mu+(B_\gamma+C_\beta)\mu\nu+(C_\alpha+A_\gamma)\nu\lambda$$
$$\mathfrak{F}'=A_\alpha.\lambda^2+B_{\beta'}.\mu^2+C_{\gamma'}.\nu^2+(A_{\beta'}+B_\alpha)\lambda\mu+(B_{\gamma'}+C_{\beta'})\mu\nu+(C_\alpha+A_{\gamma'})\nu\lambda$$
$$\mathfrak{G}=B_\delta.\mu^2+C_\varepsilon.\nu^2+A_\delta.\lambda\mu+(B_\varepsilon+C_\delta)\mu\nu+A_\varepsilon.\nu\lambda$$

sulla superficie, indipendentemente da ϱ, ϱ' si avrà:

$$z_i\equiv\lambda\alpha_i.\mathfrak{G}+(\mu\beta_i+\nu\gamma_i)\mathfrak{F}'-(\mu\beta'_i+\nu\gamma'_i)\mathfrak{F} \qquad (12)$$
$$(i=1,\dots,4)$$

epperò sono queste le formule della rappresentazione parametrica della superficie. — Da esse si vede che, interpretando le λ, μ, ν come coordinate di un punto sul piano σ, p. e., la superficie è rappresentata su questo piano dal sistema lineare ∞^3 delle cubiche

$$\lambda u_\alpha.\mathfrak{G}+(\mu u_\beta+\nu u_\gamma)\mathfrak{F}'-(\mu u_{\beta'}+\nu u_{\gamma'})\mathfrak{F}=0$$

ove $u_1,\dots,u_4$ sono le coordinate di un piano secante la superficie.

« Queste cubiche hanno a comune i 4 punti $\mathfrak{F}=0$, $\mathfrak{F}'=0$, che indicheremo con $A_1,\dots,A_4$ ed il punto $\mu=0$, $\nu=0$, cioè E; e la conica di questi 5 punti è precisamente la

$$\mathfrak{G}=0. \qquad (14)$$

« Se fra i piani secanti la superficie si scelgono quelli per cui

$$u_\beta=u_{\beta'} \qquad u_\gamma=u_{\gamma'} \qquad (15)$$

cioè quelli della retta r, allora le immagini delle sezioni fatte da questi piani hanno per equazione

$$(\lambda u_\alpha+\mu u_\beta+\nu u_\gamma).\mathfrak{G}=0$$

cioè la conica (14) ed il fascio delle rette

$$\left.\begin{aligned}\lambda u_\alpha+\mu u_\beta+\nu u_\gamma&=0\\ u_\delta&=0\\ u_\varepsilon&=0\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

che è quello di centro S. La conica (14) rappresenta un luogo fisso sulla superficie e sulle sezioni fatte coi piani di r. Si ha dunque che **la retta r è sulla superficie ed è rappresentata dalla conica $\mathfrak{G}=0$**. Questo fatto si può, del resto (e giova il farlo) far risultare più immediatamente dalle formule (12). Per un punto (λ, μ, ν) percorrente la conica $\mathfrak{G}=0$ si ha $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}'$, epperò pel punto di cui esso è l'immagine si ha:

$$z_i=(\mu\delta_i+\nu\varepsilon_i)\,.\,\mathfrak{F} \qquad (i=1\,,\ldots,4).$$

« Siccome qui $\mathfrak{F}$ funziona da fattore di proporzionalità, si ha addirittura

$$z_i\equiv\mu\delta_i+\nu\varepsilon_i \qquad (i=1\,,\ldots,4)$$

e queste sono le equazioni della retta r, perchè r è la retta dei punti δ_i, ε_i, siccome risulta dalle (15).

« 5. Scriviamo più comodamente le equazioni delle rette date dalle (16), utilizzando la (17). Un punto di r è su σ se i due parametri omogenei μ, ν soddisfanno alla condizione

$$\mu\,.\,(\alpha\beta\gamma\delta)+\nu\,.\,(\alpha\beta\gamma\varepsilon)=0$$

cioè se

$$\mu=(\alpha\beta\gamma\varepsilon)=(\alpha\beta\gamma\gamma')\,,\quad \nu=-(\alpha\beta\gamma\delta)=-(\alpha\beta\gamma\beta')=(\alpha\beta\beta'\gamma).$$

« Si avranno perciò, per coordinate di S le espressioni

$$z_i\equiv\delta_i\,(\alpha\beta\gamma\gamma')+\varepsilon_i\,(\alpha\beta\beta'\gamma) \qquad (i=1\,,\ldots,4) \tag{18}$$

ed in modo analogo, ma queste ora a noi non occorrono, per coordinate di S' le espressioni $z'_i\equiv\delta_i\,(\alpha\beta'\gamma'\gamma)+\varepsilon_i\,(\alpha\beta'\beta\gamma')$ $(i=1,\ldots,4)$. Introducendo, quindi, due quaterne arbitrarie di numeri ϱ_i, τ_i, ma fissi [1], col porre

$$\begin{aligned}\lambda(\delta\varepsilon\alpha\varrho)+\mu\,(\delta\varepsilon\beta\varrho)+\nu\,(\delta\varepsilon\gamma\varrho)&=\vartheta_\lambda\\ \lambda(\delta\varepsilon\alpha\tau)+\mu\,(\delta\varepsilon\beta\tau)+\nu\,(\delta\varepsilon\gamma\tau)&=\chi_\lambda\end{aligned} \tag{19}$$

l'equazione del fascio di rette in quistione sarà:

$$\theta_1\,\vartheta_\lambda+\theta_2\,\chi_\lambda=0$$

$\theta_1:\theta_2$ essendo parametro variabile colle rette del fascio. — Si ha da ciò che, se si pone

$$s_1:s_2:s_3=\left\|\begin{matrix}(\delta\varepsilon\alpha\varrho) & (\delta\varepsilon\beta\varrho) & (\delta\varepsilon\gamma\varrho)\\ (\delta\varepsilon\alpha\tau) & (\delta\varepsilon\beta\tau) & (\delta\varepsilon\gamma\tau)\end{matrix}\right\|\equiv\left\|\begin{matrix}(\alpha\beta\beta'\varepsilon) & 0 & -(\beta\gamma\gamma'\delta)\\ -(\alpha\gamma\gamma'\delta) & (\beta\gamma\beta'\gamma') & 0\end{matrix}\right\| \tag{20}$$

e poi anche:

$$c_i=s_1\,p_i+s_2\,q_i+c_3\,r_i \qquad (i=1\,,\ldots,4)$$

l'equazione della immagine della conica doppia sarà

$$\lambda c_\alpha\,.\,\mathfrak{G}_0+(\mu c_\beta+\nu c_\gamma)\,.\,\mathfrak{F}'_0-(\mu c_{\beta'}+\nu c_{\gamma'})\,\mathfrak{F}_0=0 \tag{21}$$

da cui si vede che una tale immagine è una cubica che passa per S, poichè si ha identicamente

$$s_1\,c_\alpha\,\mathfrak{G}_0+(s_2\,c_\beta+s_3\,c_\gamma)\,\mathfrak{F}'_0-(s_2\,c_{\beta'}+s_3\,c_{\gamma'})\,\mathfrak{F}_0=0$$

(1) Invece di ϱ_i e τ_i qualunque si possono pure prendere β_i, γ_i; β_i, γ'_i; β'_i, γ_i; β'_i, γ'_i, ma non β_i, β'_i; γ_i, γ'_i. Allora, in vece delle (19) si presentano, p. e., le $\lambda(\alpha\beta\beta'\varepsilon)-\nu(\beta\gamma\gamma'\delta)=0$, $-\lambda\,(\alpha\gamma\gamma'\delta)+\mu\,(\beta\gamma\beta'\gamma')=0$.

ove $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}'_0$ sono ciò che diventano le $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ per $\lambda:\mu:\nu = s_1:s_2:s_3$; e che appartiene al sistema lineare rappresentativo [1].

§ V.

« 6. L'equazione del piano che contiene la conica doppia è

$$s_1\,\mathfrak{F}_1 + s_2\,\mathfrak{F}_2 + s_3\,\mathfrak{F}_3 = 0 \tag{22}$$

« Ne segue che, chiamando retta polare congiunta di P la retta intersezione dei piani tangenti in P alla superficie, il luogo delle rette polari congiunte dei diversi punti dello spazio è il complesso lineare speciale rappresentato dalla (22) nella quale siano state fatte le sostituzioni (α).

« Dicendo m l'asse di un tal complesso, i piani delle coniche doppie delle diverse superficie del 4° ordine corrispondenti ai diversi punti dello spazio passano tutte per m, e ciò conduce a trovare una rappresentazione prospettica semplice del complesso lineare speciale sui punti dello spazio ordinario, rappresentazione di cui noi ora scriveremo soltanto le formole.

« 7. Una retta per P è tangente in P alla superficie se delle due intersezioni che essa ha ulteriormente a comune colla superficie una cade ancora in P. Ne segue che il luogo di tutte le tangenti in P è la coppia dei piani che per mezzo della relazione $\Omega \overline{\wedge}$ (P) corrispondono ai due raggi di Ω uscenti da P. Per i raggi uscenti da un punto qualunque y_i si deve risolvere l'equazione [2]:

$$\begin{aligned}(y\alpha\beta\gamma) &+ \{(y\alpha\beta\gamma') + (y\alpha\beta'\gamma) + (y\alpha'\beta\gamma)\}\,\varrho + \\ &+ \{(y\alpha\beta'\gamma) + (y\alpha\beta\gamma') + (y\alpha\beta\gamma')\}\,\varrho^2 + (y\alpha\beta'\gamma')\,\varrho^3 = \\ &= (\varrho+1)\left[(y\alpha\beta'\gamma')\,\varrho^2 + \{(\alpha\beta'\gamma) + (y\alpha\beta\gamma')\}\,\varrho + (y\alpha\beta\gamma)\right] = 0\end{aligned}$$

dalla quale bisogna escludere la radice $\varrho = -1$ che dà il raggio yE, che non appartiene ad Ω. Pel caso nostro si deve dunque risolvere l'equazione:

$$(\xi\alpha\beta'\gamma')\,\varrho^2 + \{(\xi\alpha\beta'\gamma) + (\xi\alpha\beta\gamma')\}\,\varrho + (\xi\alpha\beta\gamma) = 0 \tag{23}$$

« Dette ϱ_1, ϱ_2 le radici di questa equazione, e ricorrendo alle (12) si devono cavare $\sigma:\lambda:\mu:\nu$ dalle

$$\sigma\xi_i = \alpha_i\,(1+\varrho_k)\lambda + (\beta_i + \varrho_k\beta'_i)\,\mu + (\gamma_i + \varrho_k\gamma'_i)\nu$$
$$(i = 1, \ldots, 4;\quad k = 1, 2).$$

« Indicando con $\lambda_1:\mu_1:\nu_1$, $\lambda_2:\mu_2:\nu_2$ le due terne di valori che si cavano per $\lambda:\mu:\nu$ corrispondentemente a $\varrho_k = \varrho_1, \varrho_2$, la retta polare congiunta di P sarà la retta comune ai piani di equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 p_x + \mu_1 q_x + \nu_1 r_x = 0\\ \lambda_2 p_x + \mu_2 q_x + \nu_2 r_x = 0\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1] Vedi, p. e., Clebsch, *Ueber eine Gattunge* etc. Crelle, an. 1868.

[2] Cfr. la mia Nota « *Sulla sup. del 5° ord. dotata di curva doppia del 5° ordine* ». Questi Rend. settembre 1890.

cioè, posto

$$v_i = \lambda_1 p_i + \mu_1 q_i + \nu_1 r_i\,; \qquad w_i = \lambda_2 p_i + \mu_2 q_i + \nu_2 r_i$$

la retta di coordinate

$$p_{ik} \equiv v_l w_m - v_m w_l \qquad (i\,,k\,,l\,,m = 1\,,\dots,4)$$

ovvero, siccome

$$v_i w_k - v_k w_i = (pq)_{ik}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{ik}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{ik}\,(\nu\lambda)_{12}$$

la retta di coordinate

$$\begin{aligned}
p_{12} &\equiv (pq)_{34}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{34}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{34}\,(\nu\lambda)_{12}\\
p_{23} &\equiv (pq)_{14}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{14}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{14}\,(\nu\lambda)_{12}\\
p_{31} &\equiv (pq)_{24}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{24}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{24}\,(\nu\lambda)_{12}\\
p_{14} &\equiv (pq)_{23}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{23}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{23}\,(\nu\lambda)_{12}\\
p_{24} &\equiv (pq)_{31}\,(\nu\mu)_{12} + (qr)_{31}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{31}\,(\nu\lambda)_{12}\\
p_{34} &\equiv (pq)_{12}\,(\lambda\mu)_{12} + (qr)_{12}\,(\mu\nu)_{12} + (rp)_{12}\,(\nu\lambda)_{12}\,;
\end{aligned}$$

e sono queste le formule della rappresentazione prospettica suaccennata.

« Le $(\lambda\mu)_{12}$, $(\mu\nu)_{12}$, $(\nu\lambda)_{12}$ sono del 2° grado nelle ξ_i, per cui si vede che le punteggiate sono immagini di iperboloidi, ed i piani immagini di sistemi di 2° ordine e 1ª classe.

« Dalla equazione (23) si cava anche una conseguenza che dà nello stesso tempo i punti di una conica doppia dove i piani tangenti coincidono (*points-pinces*), e l'equazione punctuale del cono di Kummer, di vertice E, comune a tutte le superficie corrispondenti a tutti i punti dello spazio [1]. Infatti, coincidono i piani (24) se coincidono le 2 radici della (23); cioè, geometricamente, se pel punto ξ passano due raggi coincidenti di Ω, epperò se ξ è preso sul cono di Kummer (E). Ora ciò richiede che si abbia, visto il diverso modo come possono essere scritti i coefficienti della (23):

$$\left\{\Sigma\left[(\beta\gamma')_{lm} + (\beta'\gamma)_{lm}\right].(\xi\alpha)_{ik}\right\}^2 - 4\,.\,\Sigma(\beta\gamma)_{lm}\ (\xi\alpha)_{ik}\,.\,\Sigma(\beta'\gamma')_{lm}\ (\xi\alpha)_{ik} = 0$$
$$(i\,,k\,,l\,,m = 1\,,\dots,4)\,;$$

e perciò è questa l'equazione di [E] ».

Matematica. — *Sopra un sistema di rette (3, 4).* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Che i *points-pinces* di una delle superficie del 4° ordine siano sul cono di Kummer [E], risulta, del resto, dal modo come, per mezzo della costruzione data nel § III, si passa da un punto della conica doppia alle sue immagini sulla cubica (21). In fatti, detto M il punto preso, si traccerà il piano rM, e dentro di esso, che contiene una conica di raggi del sistema Ω, si cercheranno quelli che passano per M: i loro punti d'incontro col piano σ saranno le immagini di M. Segue da ciò che queste immagini sono allineate con S, e che, se M è uno dei punti comuni alla conica doppia ed al cono (E), i due raggi di Ω sopra nominati si confondono, e si confondono anche le immagini di M in uno dei punti di contatto delle tangenti condotte per S alla cubica (21). La precedente proprietà, del resto, che appartiene a tutti i coni di Kummer, si incontra anche, dimostrata per altra via, nella citata memoria di Zeuthen, ed in quella del sig. Berzolari. Cfr. anche Segre, l. c., n. 19.