ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

se alcun che di simile si potesse immaginare per un gas. Manca adunque ogni traccia della legge del Boyle e mancano le basi per applicare alle soluzioni la teoria cinetica dei gas.

« È certo che le belle conclusioni del van't Hoff, dell'Ostwald, dell'Arrhenius e d'altri, che tanto fecero progredire in questi ultimi tempi la fisico-chimica, rimangono invariate ancorchè sia difettosa l'ipotesi fondamentale; è certo che si può farle derivare da un altro principio più razionale e conforme all'esperienza. Probabilmente il fenomeno è complesso ed esige studi ulteriori, ma a raggruppare i fatti può servire intanto il concetto di quell'attrazione tra la soluzione e il solvente esterno o fra la sostanza disciolta e il solvente, che si palesa in tanti altri casi e che fu dapprincipio posto innanzi anche per spiegare la pressione osmotica ».

Matematica. — *Sui piani tritangenti della sestica storta di genere 4.* Nota II [1] di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« Vogliamo in questa Nota esaminare tutte le diverse specie di aggruppamenti di due quadriche, coordinate alla sestica storta, e che non si intersecano mai sulla sestica stessa.

« Dopo gli studî fatti nella Nota precedente potremo agevolmente distinguere queste diverse specie. Troveremo che esistono *otto* diverse specie di coppie di quadriche, e daremo le proprietà geometriche di ciascuna; noteremo il fatto singolare che *due* di queste specie sono formate in maniera che la relazione che una quadrica ha rispetto all'altra della coppia è diversa dalla relazione che la seconda ha rispetto alla prima; la coppia cioè non risulta composta simmetricamente colle sue due quadriche.

§ 4. — Varie specie di quadriche esterne ad una data.

« Nella Nota precedente abbiamo considerato in dettaglio la formazione del gruppo e sottogruppi che lasciano inalterata una delle quadriche. Aggiungiamo allora a questa quadrica fissa, un'altra ad essa esterna, cioè tale che i quattro piani della quaterna-zero che la rappresenta sieno tutti scelti fra i $96 + 20$ piani di cui si è parlato nella Nota precedente. E quì ci si presentano subito varî casi, secondochè tali quattro piani sono scelti tutti fra i 96, ovvero alcuni fra i 96 e altri fra i 20, ovvero tutti fra i 20.

« Scegliamo i quattro piani tutti fra i 96. Essendoci la transitività fra questi 96 piani, uno di essi lo possiamo scegliere arbitrariamente e sia uno della prima coppia del primo sistema, cioè il piano (135).

[1] V. pag. 204.

« Se gli altri 3 piani sono scelti nel medesimo primo sistema del quadro (A) (v. § 2. Nota precedente) si hanno i seguenti casi

$[a_1]$ 135 . 124 . 246 . 356 in numero di $\frac{96 \,.\, 5}{4}$

$[a_2]$ 135 . 124 . 167 . 8910 » $\frac{96 \,.\, 10}{4}$

$[a_3]$ 135 . 246 . 178 . 1910 (1) » $\frac{96 \,.\, 10 \,.\, 6}{4}$

e tutte le altre quaterne formate con quattro piani di uno stesso sistema d'imprimitività sono equivalenti ad una di queste, per le varie considerazioni sviluppate nella Nota precedente.

« Si vogliano ora le quaterne formate con piani appartenenti a diversi sistemi d'imprimitività. Scegliamo i due piani (135) (435).

« Quì ci sarà facile vedere la equivalenza o no delle quaterne contenenti questa coppia perchè il gruppo di sostituzioni che lascia fissi questi due piani, pei risultati della Nota precedente, si riduce solo ad opportune permutazioni di punti.

« Ora le coppie di piani che formano quaterne-zero coi due dati sono dei tipi

$$\begin{array}{ll} 15i \,.\, 45i & \\ 13i \,.\, 45i & (i, j = 2, 6, 7, 8, 9, 10) \\ 1ij \,.\, 4ij & \end{array}$$

« Nel primo e secondo caso se $i = 2$ si hanno i piani della quaterna fondamentale, e se $i = 6, 7, \ldots$ si hanno piani compresi nella tabella (B) del § 2 (Nota I) e questi casi li esamineremo dopo. Nel 3° caso poi si hanno sempre piani compresi nel quadro (A), però se ne hanno di due specie non equivalenti, cioè, o quando uno degli indici $i, j = 2$, ovvero nessuno di essi è eguale a 2.

« Si hanno dunque altre due quaterne formate con piani del quadro (A) e sono:

$[a_4]$ 135 . 435 . 126 . 426 in numero di $\frac{96 \,.\, 64 \,.\, 5}{8}$

$[a_5]$ 135 . 435 . 167 . 467 » $\frac{96 \,.\, 64 \,.\, 10}{8}$

« Oltre di queste cinque non esistono altre specie di quaterne formate con piani del quadro (A) (§ 2. Nota I).

(1) Dato il piano (135), il 2° piano può essere scelto in 10 modi diversi; e allora gli ultimi due piani possono essere scelti in 6 modi diversi e fra loro equivalenti. Così p. es. la quaterna 135 . 246 . 178 . 1910 è equivalente a 135 . 246 . 678 . 6910, perchè colla sostituzione studiata in fine della Nota precedente la prima quaterna si trasforma nella seconda.

« Vediamo ora quelle formate con piani del quadro (A) e del quadro (B).

« Dall'ultima considerazione ne abbiamo già ottenute; esse si hanno riunendo ai due piani (135) (435) due altri dei tipi

$$\begin{matrix} 15i \,.\, 45i \\ 13i \,.\, 43i \end{matrix} \qquad (i = 6, 7, 8, 9, 10)$$

« Le sostituzioni che lasciano fissi quei due piani sono le 5! sostituzioni fra i punti 6, 7, ..., 10 e lo scambio dei due punti 3, 5; quindi si vede che tutte le siffatte quaterne sono fra loro equivalenti, e quindi basta considerarne una sola e sia

$$[a_6] \qquad 135 \,.\, 435 \,.\, 156 \,.\, 456 \text{ in numero di } \frac{96 \,.\, 54 \,.\, 10}{6}$$

« È formata con tre piani di ciascuno dei tre sistemi del quadro (A) e con un piano solo del quadro (B).

« Consideriamo ora due piani di uno stesso sistema del quadro (A) e vediamo in quanti modi possono formare quaterne con piani del quadro (B). Se i due primi piani appartengono ad una stessa coppia, allora pel teor. 5) del § 2 (Nota I) si ha una sola specie di quaterne cioè

$$[a_7] \qquad 135 \,.\, 124 \,.\, 236 \,.\, 456 \text{ in numero di } 480$$

Se i due piani non appartengono alla stessa coppia possono essere di due tipi cioè o come 153 . 246 ovvero 153 . 167.

« Si può riconoscere che i due primi formano con un piano della tabella (B) sempre o una terna pari ovvero una terna dispari, ma di cui la somma è uno dei 4 piani fondamentali, il che non succede per i due secondi. Ciò dimostra anche sotto altra forma il teorema 6) da noi dimostrato nel § 3 della Nota precedente.

« I due piani poi 135 . 167 formano sempre terna *pari* con un piano delle tre ultime colonne della tabella (B) e terna dispari con un piano delle due prime colonne. Ora per le sostituzioni che permutano il punto 3 con 5, il punto 2 con 4, il punto 6 con 7, la quaterna fondamentale resta fissa come anche i due piani di sopra, e intanto per queste sostituzioni gli 8 piani delle due prime colonne della tabella (B) restano fra loro transitivamente congiunti, quindi si forma un'altra sola specie di quaterne cioè

$$[a_9]\,(^1) \qquad 135 \,.\, 167 \,.\, 236 \,.\, 257 \text{ in numero di } \frac{96 \,.\, 20 \,.\, 4}{2}$$

« Resta ad esaminare le quaterne formate con un solo o con nessuno dei piani della tabella (A) e con piani di (B).

(1) La chiamiamo $[a_9]$ e non $[a_8]$ per una ragione che si vedrà dopo.

« Ora si può vedere che non esiste una quaterna-zero contenente solo un piano di (A). Infatti sia esso (135); allora sappiamo che se questo resta fisso, rimane la transitività fra i 20 piani di (B); quindi assumiamo arbitrariamente uno di questi 20 piani e sia (236); ora con i due piani (135) (236) tutti gli altri piani di (B) o formano terna pari ovvero formano terna dispari ma la cui somma non è più un piano di (B).

« Esaminiamo ora le quaterne formate con piani scelti solo fra i 20 di (B). Possiamo far vedere come è formato il gruppo di sostituzioni che lasciano fisso uno dei 20 piani p. es. (236).

« Si vede che (236) unito con un piano della stessa sua colonna forma quaterna-zero con una coppia della quaterna data fondamentale, mentre ciò non succede per ogni altro piano non appartenente alla medesima colonna di (236). Dunque:

« *Il gruppo che lascia fisso uno dei 20 piani, separa gli altri 19 in* $3+16$ ».

« Possiamo dimostrare ancora che fra i 16 c'è la transitività. Infatti con semplici permutazioni dei punti 7, 8, 9, 10, colle quali (236) resta fisso, e anche la quadrica fondamentale resta fissa, da un piano dei 16 posso passare ad ogni altro compreso nella medesima linea cui esso appartiene. Inoltre colla sostituzione che muta il sistema completo

$$231 \,.\, 236 \,.\, 234 \,.\, 235 \,.\, 237 \,.\, 238 \,.\, 239 \,.\, 2310 \;,\; q=2 \;,\; q'=3$$

in

$$231 \,.\, 236 \,.\, 165 \,.\, 235 \,.\, 347 \,.\, 348 \,.\, 349 \,.\, 3410 \;,\; q=2 \;,\; q'=12456$$

(corrispondente ad una figura come la 27ª della Mem. I degli Annali di Matematica vol. XX) si lascia fisso (236) e la quadrica fondamentale, mentre si muta (237) in (347); e colla sostituzione che muta lo stesso sistema completo in

$$231 \,.\, 236 \,.\, 234 \,.\, 164 \,.\, 257 \,.\, 258 \,.\, 259 \,.\, 2510 \;,\; q=13456 \;,\; q'=3$$

si muta invece (236) in (257), e finalmente col prodotto delle due sostituzioni si muta (237) in (457); dunque (237) può trasformarsi anche in ogni altro della sua medesima colonna e con ciò resta dimostrata la transitività fra i 16 piani.

« Si vede allora che le sole quaterne fra loro non equivalenti che possono formarsi con piani scelti solo nel quadro (B) sono di due tipi cioè

$[a_8]$	236 . 436 . 456 . 256	in numero di	5
$[a_{10}]$	236 . 436 . 237 . 437	»	120

§ 5. Proprietà geometriche delle varie coppie di quadriche.

« Colle cose dette nel § precedente noi siamo ora in grado di distinguere le varie specie di coppie di quadriche esterne l'una all'altra e di fissarne i caratteri distintivi.

« Basterà che alla quadrica fondamentale aggiungiamo ciascuna delle dieci quadriche trovate nel paragrafo precedente. Avremo così altrettante coppie. Però bisogna notare che alcune di queste coppie non risultano di specie diverse fra loro. Ciò dipende dal fatto che alcune di esse non risultano formate simmetricamente mediante le loro due quadriche, e quindi per la natura della enumerazione fatta, esse ci risultano due volte.

« Propriamente, chiamando $[a]$ la quadrica fondamentale, noi possiamo verificare che le coppie

$$[a]\ [a_1]$$
$$[a]\ [a_4]$$

non sono simmetriche nei loro elementi e sono rispettivamente le medesime di

$$[a_{10}]\ [a]$$
$$[a_9]\ [a]$$

« Tutte le altre sei coppie poi sono composte simmetricamente; quindi possiamo dire:

« *Esistono solo 8 specie distinte di coppie di quadriche, di cui due* « *non sono composte simmetricamente* ».

« Per dimostrare questo che abbiamo asserito, come anche per trovare le proprietà geometriche che caratterizzano le diverse otto coppie, non dobbiamo fare altro che esaminarne separatamente la costituzione, riunendo alle quaterne $[a_1]$ $[a_2]$ ecc. la quaterna fondamentale.

$$[a] = 123\ .\ 134\ .\ 145\ .\ 152$$

e ricercando quante altre quaterne si possono formare con piani dell'una e piani dell'altra delle due della coppia. Ecco i risultati che troviamo:

« *Una coppia di 1ª specie di quadriche è rappresentata da* $[a]$ $[a_1]$. « *Per essa c'è la proprietà che esistono 4 altre quadriche che incontrano* « *(sulla sestica) in* $6 + 6$ *punti ciascuna delle due date, e inoltre esistono poi* « *16 altre quadriche che incontrano in 6 punti (sulla sestica) una delle date* « *e solo in 3 punti l'altra, non esistendo poi (fra le 32130, s'intende) le* « *quadriche che hanno la proprietà opposta; di quì si vede la mancanza* « *di simmetria della prima coppia. Nella coppia* $[a]$ $[a_{10}]$ *si ha l'analoga* « *proprietà ma invertita.*

« *Una coppia di 2ª specie è rappresentata da* $[a]$ $[a_2]$. *Per essa vi* « *sono 4 quadriche che incontrano in* $6 + 6$ *punti ciascuna delle date,* « *e mancano le 16 di cui si è parlato sopra.*

« *Una coppia di 3ª specie è rappresentata da* $[a]$ $[a_3]$. *Per essa vi* « *sono* $8 + 8$ *quadriche (s'intende, sempre fra 32130) che tagliano* « *(sulla sestica) in 6 punti una delle due date e in 3 punti l'altra, e vi-* « *ceversa. Di queste 16 quadriche ve ne sono sempre 4 passanti per i* « *medesimi sei punti della sestica. Esse incontrano daccapo la sestica in*

« *12 + 12 punti pei quali passano 2 altre quadriche formanti una coppia* « *della medesima specie di quella di cui si è partiti, e da cui, riappli-* « *cando lo stesso procedimento, si tornerebbe alla coppia data.*

« *Una coppia di 4ª specie è rappresentata da* $[a]\,[a_4]$. *Per essa esi-* « *stono 8 quadriche che incontrano in 6 punti la prima delle date, e in* « *3 punti l'altra, e esistono invece 16 quadriche che incontrano in 3 punti* « *la prima è in 6 punti la seconda. Come si vede dunque, manca la sim-* « *metria fra le 2 quadriche della coppia, come avevamo annunziato, e* « *si può verificare che la coppia* $[a]\,[a_9]$ *possiede esattamente la analoga* « *proprietà ma invertita.*

« *Una coppia di 5ª specie è rappresentata da* $[a]\,[a_5]$. *Per essa vi* « *sono (come nella coppia di 3ª specie) 8 + 8 quadriche che incon-* « *trano in 6 punti una delle date e in 3 punti l'altra, e viceversa, però,* « *a differenza della terza specie, di queste 16 quadriche non ve ne sono* « *mai più che 2 passanti per i medesimi 6 punti (della sestica). Anche* « *quì si ha però la proprietà analoga a quella della coppia di 3ª specie,* « *che cioè queste 16 quadriche incontrano ancora la sestica in tutto in* « *12 + 12 altri punti residui, pei quali passano 2 nuove quadriche for-* « *manti una coppia della stessa specie di quella da cui si è partiti e da* « *cui collo stesso procedimento si torna alla data.*

« *Una coppia di 6ª specie è rappresentata da* $[a]\,[a_6]$. *Esistono 12 + 12* « *quadriche che tagliano in 6 punti l'una e in 3 l'altra e viceversa.*

« *Una coppia di 7ª specie è rappresentata da* $[a]\,[a_7]$. *Esistono 4* « *quadriche che tagliano in 6 + 6 punti le due date, e 8 + 8 altre* « *quadriche che tagliano in 6 punti l'una e in 3 l'altra e viceversa.* « *Questa proprietà non può confondersi con quella che ha la coppia di* « *1ª specie, perchè nella coppia di 1ª specie non c'è la simmetria fra le* « *2 quadriche della coppia e invece la simmetria c'è fra le 2 quadriche* « *della coppia di 7ª specie; o, altrimenti, nella coppia di 1ª specie le 16* « *altre quadriche si cui si parla incontrano tutte in 6 punti una fissa* « *delle date, mentre nella 7ª specie solo 8 di esse incontrano in 6 punti* « *una delle date, le altre 8 incontrandola in 3 punti.*

« *Finalmente la coppia di 8ª specie è rappresentata da* $[a]\,[a_8]$, *e per essa esistono 12 quadriche che incontrano sempre in 6 + 6 punti le* « *2 della coppia* ».

« Come si vede queste proprietà sono tutte fra loro diverse, e possono servire a differenziare le varie specie di coppie. Il numero poi delle coppie esistenti in ciascuna specie si ricava immediatamente dai numeri stabiliti nel § precedente ».