ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Sopra un sistema di rette (3, 4).* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« Nei Rend. del Circolo Matematico di Palermo, t. I, fasc. 4°, an. 1887, in una Nota dal titolo: *Su certi luoghi che s'incontrano nello studio* ecc., io trattai di un certo sistema di rette del 3° ordine e della 4ª classe, contenente nove fasci, due coni quadrici ed un cono cubico. Questo sistema io l'ho ora di nuovo incontrato nel seguito di alcune ricerche intorno alle superficie del 5° ordine, e mi propongo in questa Nota di metterne in evidenza le proprietà che ho ricavate. Fra l'altro vi si trovan dedotte le formule per la rappresentazione piana di certe superficie dell' i^{mo} ordine, omaloidi, con k rette ($i = 7, 6, 5$; $k = 9, 10, 11$), e vi si trova studiata una certa congruenza del 3° grado che si presenta quale caso speciale del sistema.

§ I.

Le formule per la rappresentazione piana del sistema.

« 1. Una stella di piani può essere rappresentata dall'equazione

$$(S) \equiv \lambda p_x + \mu q_x + \nu r_x = 0 \tag{1}$$

ove $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ sono tre piani della stella e $\lambda : \mu : \nu$ parametri variabili. Una stella (ξ) di rette, reciprocamente riferita alla (S), e che abbia il centro in un punto ξ_i ($i = 1, \dots, 4$) si può, in vece, intendere data (¹) dalle equazioni:

$$z_i \equiv \sigma \xi_i + \tau \eta_i \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{2}$$

ove è

$$\eta_i \equiv \lambda \alpha_i + \mu \beta_i + \nu \gamma_i \quad (i = 1, \dots, 4) \tag{3}$$

ed ove α_i, β_i, γ_i sono le coordinate di tre punti non complanari con ξ_i; $\lambda : \mu : \nu$ fissano la posizione di una retta della stella, e $\sigma : \tau$ un punto z_i di questa.

« Analogamente, un'altra stella di rette, reciprocamente riferita alla (S) e che abbia il centro nel punto ξ'_i, s'intenderà data dalle equazioni:

$$z'_i \equiv \sigma' \xi'_i + \tau' \eta'_i \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{2'}$$

ove è

$$\eta'_i \equiv \lambda \alpha'_i + \mu \beta'_i + \nu \gamma'_i \quad (i = 1, \dots, 4)$$

ed ove significato analogo al precedente hanno le quantità $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$; $\lambda : \mu : \nu$; $\sigma' : \tau'$. Ciò posto, il punto ove la retta $\lambda : \mu : \nu$ della stella (ξ) incontri il corrispondente piano di (S) sarà tale che per esso si avrà:

$$\sigma (\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi) + \tau (\lambda p_\eta + \mu q_\eta + \nu r_\eta) = 0 \tag{5}$$

(¹) Cfr. la mia Nota: *Ancora della sup. del 5° ord.* ecc., nei Rend. della R. Acc. dei Lincei, settembre 1892.

ed in modo analogo, pel punto in cui la retta $\lambda:\mu:\nu$ di (ξ') incontra quel medesimo piano di (S) si avrà:

$$\sigma'\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) + \tau'\,(\lambda p_{\eta'} + \mu q_{\eta'} + \nu r_{\eta'}) = 0. \tag{6}$$

La (5) dà:

$$\sigma : \tau = \lambda p_{\eta} + \mu q_{\eta} + \nu r_{\eta} : -(\lambda p_{\xi} + \mu q_{\xi} + \nu r_{\xi})$$

e la (6)

$$\sigma' : \tau' = \lambda p_{\eta'} + \mu q_{\eta'} + \nu r_{\eta'} : -(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}).$$

« Ora è, in generale, in virtù di (3) e (4):

$$(zz')_{ik} \equiv \sigma\sigma'\,(\xi\xi')_{ik} + \sigma\tau'\,(\xi\eta')_{ik} + \tau\sigma'\,(\eta\xi')_{ik} + \tau\tau'\,(\eta\eta')_{ik} \tag{7}$$
$$(ik = 12\,, \dots, 34)$$

dunque sarà, per una retta del sistema in quistione, sistema che continueremo a denominare **K**, come nella citata Nota dei Rend. del Circ. Mat.:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \,.\, p_{ik} = {} & (\lambda p_{\eta} + \mu q_{\eta} + \nu r_{\eta})\,(\lambda p_{\eta'} + \mu q_{\eta'} + \nu r_{\eta'})\,(\xi\xi')_{ik} \\ & -(\lambda p_{\eta} + \mu q_{\eta} + \nu r_{\eta})\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\,(\xi\eta')_{ik} \\ & -(\lambda p_{\eta'} + \mu q_{\eta'} + \nu r_{\eta'})\,(\lambda p_{\xi} + \mu q_{\xi} + \nu r_{\xi})\,(\eta\xi')_{ik} \\ & +(\lambda p_{\xi} + \mu q_{\xi} + \nu r_{\xi})\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\,(\eta\eta')_{ik} \end{aligned}\right\} (ik = 12, \dots, 34) \tag{8}$$

« 2. Se, considerando i due tetraedri $\xi\alpha\beta\gamma$, $\xi'\alpha'\beta'\gamma'$, poniamo:

$$(\xi, \alpha, \beta, \gamma)\,(\xi', \alpha', \beta', \gamma') \equiv h, a, b, c, a', l, e, g', b', e'\, m, f, c', g, f', m,$$

e poi indichiamo coi medesimi simboli muniti di opportuni indici le coordinate delle rette che essi rappresentano, [1] siccome si ha:

$$(\xi\eta')_{ik} = \lambda\,(\xi\alpha')_{ik} + \mu\,(\xi\beta')_{ik} + \nu\,(\xi\gamma')_{ik}\,;$$
$$(\eta\xi')_{ik} = \lambda\,(\alpha\xi')_{ik} + \mu\,(\beta\xi')_{ik} + \nu\,(\gamma\xi')_{ik}$$
$$\begin{aligned}(\eta\eta')_{ik} = {} & (\alpha\alpha')_{ik} \,.\, \lambda^2 + (\beta\beta')_{ik} \,.\, \mu^2 + (\gamma\gamma')_{ik} \,.\, \nu^2 \,\{(\beta\gamma')_{ik} - (\beta'\gamma)_{ik}\}\,\mu\nu \,+ \\ & + \{(\gamma\alpha')_{ik} - (\gamma'\alpha)_{ik}\}\,\nu\lambda + \{(\alpha\beta')_{ik} - (\alpha'\beta)_{ik}\}\,\lambda\mu\end{aligned}$$
$$(ik = 12\,, \dots, 34),$$

ponendo poi anche

$$\Phi = p_{\alpha} \,.\, \lambda^2 + q_{\beta} \,.\, \mu^2 + r_{\gamma} \,.\, \nu^2 + (p_{\beta} + q_{\alpha})\,\lambda\mu + (q_{\gamma} + r_{\beta})\,\mu\nu + (r_{\alpha} + p_{\gamma})\,\nu\lambda$$
$$\Psi = p_{\alpha'} \,.\, \lambda^2 + q_{\beta'} \,.\, \mu^2 + r_{\gamma'} \,.\, \nu^2 + (p_{\beta'} + q_{\alpha'})\,\lambda\mu + (q_{\gamma'} + r_{\beta'})\,\mu\nu + (r_{\alpha'} + p_{\gamma'})\,\nu\lambda$$

le formule (8) potranno essere scritte nella forma seguente, dalla quale apparisce più chiara la loro formazione per mezzo delle λ, μ, ν:

$$\begin{aligned} \varrho \,.\, p_{ik} = {} & \Phi \,.\, \Psi \,.\, h_{ik} - (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik})\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) \,.\, \Phi \\ & - (\lambda a'_{ik} + \mu b'_{ik} + \nu c'_{ik})\,(\lambda p_{\xi} + \mu q_{\xi} + \nu r_{\xi}) \,.\, \Psi \,+ \\ & + (\lambda p_{\xi} + \mu q_{\xi} + \nu r_{\xi})\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) \,.\, \{ l_{ik} \,.\, \lambda^2 + m_{ik} \,.\, \mu^2 + n_{ik} \,.\, \nu^2 \,+ \\ & + (f_{ik} - f'_{ik})\,\mu\nu + (g_{ik} - g'_{ik})\,\nu\lambda + (e_{ik} - e'_{ik})\,\lambda\mu \}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

« E queste sono le formule per mezzo delle quali, prendendo λ, μ, ν come coordinate omogenee di un punto di un piano, il sistema **K** viene rappresentato su questo piano.

[1] In modo che si abbia, p. e., $(\xi\alpha')_{ik} = a_{ik}$, $(\alpha\xi') = a'_{ik}$, ..., $(\alpha\beta')_{ik} \equiv e_{ik}$, $(\alpha'\beta)_{ik} = e'_{ik}$, ...

§ II.

Il sistema lineare rappresentativo. — I fasci ed i coni di K.

« 3. Se indichiamo con A_μ l'invariante simultaneo della retta

$$\mu \equiv h,\ a,\ b,\ c,\ a',\ l, \ldots, g,\ f',\ n$$

considerata come asse di un complesso lineare speciale, e del complesso

$$\Sigma A_{lm}\, p_{ik} = 0$$

e se, per brevità, poniamo:

$$\Theta_\lambda = A_l \,.\, \lambda^2 + A_m \,.\, \mu^2 + A_n \,.\, \nu^2 + (A_f - A_{f'})\,\mu\nu + (A_g - A_{g'})\,\nu\lambda + (A_e - A_{e'})\lambda\mu$$

il sistema lineare di curve, rappresentativo delle rigate di **K** contenute nei diversi complessi lineari dello spazio, è fornito dall'equazione:

$$\begin{aligned} \Phi \,.\, \Psi \,.\, A_h &- (\lambda A_a + \mu A_b + \nu A_c)\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\,\Phi \\ &- (\lambda A_{a'} + \mu A_{b'} + \nu A_{c'})\,(\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi)\,\Psi \\ &+ (\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi)\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\,\Theta_\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

dove sono A_{ik} ($ik = 12, \ldots, 34$) i parametri variabili colle curve del sistema. Dalla (10) si vede che le curve sono del 4° ordine, e che hanno a comune i punti (semplici):

$$\begin{matrix} P_i \\ P_2 \end{matrix} \equiv \left\{ \Phi = 0\,,\ \lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi = 0 \ \ \alpha) \right.,$$

ed i punti

$$\begin{matrix} P'_1 \\ P'_1 \end{matrix} \equiv \left\{ \Psi = 0\,,\ \lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'} = 0 \ \ \beta) \right.;$$

ma non è difficile riconoscere che vi sono, oltre a questi, altri 5 punti comuni, che diremo $Q_1, \ldots, Q_5$. In fatti, risulta da un noto teorema di Halphen, e del resto un breve ragionamento assicurerebbe di ciò direttamente, che il sistema **K** ha comune con una congruenza lineare arbitraria $3 + 4 = 7$ raggi; perciò due rigate, rappresentate da due qualunque delle curve del sistema (10), hanno a comune 7 generatrici variabili; e quindi le curve (10) si tagliano a due a due in 7 punti non comuni a tutti, cioè esse hanno, oltre i punti $P_i\, P'_i$ ($i = 1, 2$) altri $16 - 4 - 7 = 5$ punti comuni.

« Ciascuno dei punti P, P′, Q rappresenta un fascio di rette in **K**, ciò che riconferma l'esistenza in questo di nove di tali fasci [1].

« 4. Alla retta che congiunge due punti fondamentali corrisponde in **K** una rigata che ha comune con un complesso lineare arbitrario due generatrici, cioè una rigata del 2° ordine. Ne segue che in **K** vi sono 36 di tali rigate; possiamo però mostrare che di queste le due che corrispondono alle rette $P_1\, P_2$, $P'_1\, P'_2$ sono coni coi vertici in ξ, ξ' rispettivamente. Infatti, le rette che corrispondono ai punti di $P_1\, P_2$ sono date da

$$\varrho \,.\, p_{ik} = \Psi \,.\, h_{ik} - (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik})\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) \qquad (11)$$

[1] Cfr. la mia citata Nota: *Su certi luoghi* ecc.

coi soliti valori di ik, e da $\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi = 0$. — Ora dalle (11) si ha

$$\Sigma p_{ik}\, a_{lm} \equiv \Psi . a_h - (\lambda a_a + \mu a_b + \nu a_c)\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_\xi + \nu r_{\xi'}) = 0$$
$$\Sigma p_{ik}\, b_{lm} \equiv \Psi . b_h - (\lambda b_a + \mu b_b + \nu b_c)\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) = 0$$
$$\Sigma p_{ik}\, c_{lm} \equiv \Psi . c_h - (\lambda c_a + \mu c_b + \nu c_c)\,(\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) = 0$$

poichè è:

$$a_a = 2(a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24}) = 0,\ b_b = 2(b_{12}b_{35} + b_{22}b_{14} + b_{31}b_{24}) = 0,$$
$$c_c = 2(c_{12}c_{34} + c_{23}c_{14} + c_{31}c_{24}) = 0,$$

e per essere $\xi\,(\alpha',\ \beta',\ \gamma') \equiv a,\ b,\ c$, è anche:

$$a_b = a_c = a_h = b_c = b_a = b_h = c_a = c_b = c_h = 0.$$

« Ne segue che la retta p_{ik} data dalle (11), appoggiandosi alle rette, non complanari a, b, c passa pel punto ξ, comune a queste rette. — In modo analogo si ha che le rette corrispondenti ai punti di $P'_1\, P'_2$, cioè le rette per cui

$$\varrho . p_{ik} = \Phi . h_{ik} - (\lambda a'_{ik} + \mu b'_{ik} + \nu c'_{ik})\,(\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\zeta) \qquad (11')$$
$$\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'} = 0$$

passano tutte per ξ'. E noi abbiamo così anche la riconferma dell'esistenza di due coni quadrici coi vertici in ξ, ξ'. — Siccome risulta dalle (11), (11') le quali danno per la retta corrispondente al punto $P_1\,P_2\,.\,P'_1\,P'_2 \equiv P$:

$$p_{ik} \equiv \Psi . h_{ik} \equiv \Phi . h_{ik}$$

la retta $\xi\xi'$ è generatrice comune a quei coni quadrici.

« 5. Non sarà senza interesse di giungere a questi ultimi risultati in altro modo. Se si considera la quadrica Σ data dalla relazione $(S) \overline{\wedge} (\xi)$, e quella Σ' data dalla $(S) \overline{\wedge} (\xi')$, la prima sarà rappresentata parametricamente dalle formule:

$$z_i \equiv \Phi . \xi_i - (\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi)\, \eta_i \quad (i = 1, \ldots, 4) \qquad (12)$$

e la seconda dalle formule:

$$z'_i \equiv \Psi . \xi'_i - (\lambda p_{\zeta'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\, \eta'_i \quad (i = 1, \ldots, 4). \qquad (13)$$

« Le (12) proiettano stereograficamente Σ sul piano $\sigma \equiv \overline{\alpha\beta\gamma}$ dal punto ξ, e le (13) proiettano Σ' sul piano $\sigma' \equiv \overline{\alpha'\beta'\gamma'}$ dal punto ξ'.

« Ora, formando con le z_i, z'_i, date dalle (12), (13) le espressioni $(zz')_{ik}$ si hanno precisamente le (9), ed intanto, per mezzo delle (3) e (3') il piano σ è proiettivamente riferito al piano σ'. Cosicchè, indicando con Ω questa proiettività, la quale, del resto, non è altro che quella ottenuta dal segare $(\xi) \overline{\wedge} (\xi')$ con σ, σ', ed indicando $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ le due proiezioni stereografiche suaccennate, si può dire che **K** proviene dal congiungere i punti omologhi di Σ, Σ' nella corrispondenza $\mathfrak{H} \equiv \mathfrak{P}_1\, \Omega\, \mathfrak{P}_2^{-1}$, o, se si vuole, nella $\mathfrak{H}^{-1} \equiv \mathfrak{P}_2\, \Omega^1\, \mathfrak{P}_1^{-1}$. — Ora è facile di vedere che, per mezzo di $\mathfrak{H}$, al punto ξ corrispondono su Σ' tutti i punti della conica:

$$\left.\begin{array}{c} z'_i \equiv \Psi . \xi'_i - (\lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\, \eta'_i \\ \lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi = 0 \end{array}\right\}, \quad (14)$$

e, per mezzo di $\mathfrak{H}^{-1}$, corrispondono al punto ξ'_i tutti i punti di Σ sulla conica:

$$\left.\begin{array}{l} z_i \equiv \Phi . \xi_i - (\lambda p_\xi + \mu q_\xi + \nu r_\xi)\, \eta_i \\ \lambda p_{\xi'} + \mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'} = 0 \end{array}\right\}, \quad (15)$$

cosicchè il sistema **K** contiene i coni quadrici che da ξ, ξ' proiettano ordinatamente le coniche (14) e (15).

« 6. Dalla stessa considerazione della $\mathfrak{H}$ e della $\mathfrak{H}^{-1}$ si ricava che i 4 fasci di rette di **K** corrispondenti ai punti $P_i\ P'_i\ (i = 1, 2)$ sono nei piani che da S proiettano le due generatrici di Σ uscenti da ξ, e in quelli che da S proiettano le due generatrici di Σ' uscenti da ξ'. Sicchè, indicando con $s_1 : s_2 : s_3$, $t_1 : t_2 : t_3$ le radici comuni alle (α), e con $s'_1 : s'_2 : s'_3$, $t'_1 : t'_2 : t'_3$ quelli comuni alle (β), si avranno le equazioni dei 4 piani sunnominati nella forma:

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1 (\xi\xi'\alpha x) + \chi_2 (\xi\xi'\beta x) + \chi_3 (\xi\xi'\gamma x) = 0 \\ \vartheta_1 (\xi\xi'\alpha' x) + \vartheta_2 (\xi\xi'\beta' x) + \vartheta_3 (\xi\xi'\gamma' x) = 0 \end{array}\right\} \; (\chi \equiv s, t \,;\; \vartheta \equiv s', t').$$

« 7. Tornando al sistema lineare rappresentativo, siccome i 9 fasci di K passano tutti per S ed ogni complesso lineare ha comuni con un cono cubico tre raggi, la curva rappresentativa del cono cubico del sistema, col vertice in S, passerà per tutti i 9 punti P, P′, Q ed avrà comune con ognuna delle curve (10) soltanto tre intersezioni variabili: la curva rappresentativa del cono cubico di **K** è, adunque, la cubica condotta pei 9 punti base del sistema rappresentativo. Siccome questa cubica ha comune un punto soltanto con la retta che unisce due punti fondamentali (fuori di questi), così sul cono cubico (S) vi sono 36 generatrici, le quali appartengono una ad una alle 36 rigate del 2° ordine: fra esse, quelle che appartengono ai coni quadrici (ξ), (ξ') sono le rette ξS, ξ'S.

« Potremmo ora cercare tutte le rigate cubiche contenute in **K**; troveremmo che, oltre al cono (S), ve ne sono di due specie, come pure potremmo cercare quelle degli altri ordini; ma questa ricerca riducendosi a fare uno studio sul sistema rappresentativo, preferiamo tralasciarla per dar posto invece alla ricerca delle formule di rappresentazione di alcune superficie omaloidi.

§ III.

Formule per la rappresentazione piana di superficie dell'i^{mo} ordine con k rette $(i = 7, 6, 5;\ k = 9, 10, 11)$ equivalenti a proiezioni di K.

« 8. Consideriamo due sestuple qualunque di quantità $\xi_{ik}, \eta_{ik}\ (ik = 12, \ldots, 34)$ tali però che non si abbia (per ora)

$$\chi_{12}\,\chi_{34} + \chi_{23}\,\chi_{14} + \chi_{31}\,\chi_{24} = 0 \qquad (\chi \equiv \xi, \eta) \qquad (16)$$

e formiamo le espressioni:

$$z_{ik} \equiv \vartheta_1\, \xi_{ik} + \vartheta_2\, \eta_{ik} + \vartheta_3\, p_{ik} \qquad (ik = 12\,, \ldots, 34) \qquad (17)$$

ove $\vartheta_1 : \vartheta_2 : \vartheta_3$ sono parametri variabili, e p_{ik} le coordinate di una retta del sistema **K**. Se, prendendo ad arbitrio due equazioni lineari della forma:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \mathrm{H}_{lm}\, z_{ik} = 0 \\ \Sigma \mathrm{K}_{lm}\, z_{ik} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

noi vi facciamo le sostituzioni (17), dette $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{K} = 0$ le curve del sistema (10) che corrispondono ai complessi lineari di coordinate H_{lm}, K_{lm} $(lm = 12, \ldots, 34)$ ed M_χ l'invariante simultaneo dei complessi di coordinate M_{lm}, χ_{ik} rispettivamente $(\mathrm{M} \equiv \mathrm{H}, \mathrm{K}; \chi \equiv \xi, \eta)$, noi abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 \,.\, \mathrm{H}_\xi + \vartheta_2 \,.\, \mathrm{H}_\eta + \vartheta_3 \,.\, \mathbf{H} = 0 \\ \vartheta_1 \,.\, \mathrm{K}_\xi + \vartheta_2 \,.\, \mathrm{K}_\eta + \vartheta_3 \,.\, \mathbf{K} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

per cui potremo dalle (17) e (19) ricavare:

$$z_{ik} \equiv (\mathrm{H}_\eta \mathbf{K} - \mathrm{K}_\eta \mathbf{H})\, \xi_{ik} + (\mathrm{K}_\xi \mathbf{H} - \mathrm{H}_\xi \mathbf{K})\, \eta_{ik} + (\mathrm{H}_\xi \mathrm{K}_\eta - \mathrm{H}_\eta \mathrm{K}_\xi)\, p_{ik} \quad (20)$$
$$(ik = 12, \ldots, 34).$$

« Queste formule, immaginando le p_{ik} sostituite con le espressioni (9), rappresentano, con un numero sovrabbondante di coordinate, una superficie che, usando il linguaggio della geometria a più dimensioni, può essere considerata come proiezione sul nostro spazio del sistema **K** considerato quale superficie di una varietà lineare a 5 dimensioni. — Le (20) conducono all'equazione seguente pel sistema lineare rappresentativo:

$$(\mathrm{H}_\eta \mathbf{K} - \mathrm{K}_\eta \mathbf{H})\, \mathrm{A}_\xi + (\mathrm{K}_\xi \mathbf{H} - \mathrm{H}_\xi \mathbf{K})\, \mathrm{A}_\eta + (\mathrm{H}_\xi \mathrm{K}_\eta - \mathrm{H}_\eta \mathrm{K}_\xi)\, \mathbf{A} = 0$$

che può essere anche scritta nella forma

$$(\mathrm{K}_\xi \mathrm{A}_\eta - \mathrm{K}_\eta \mathrm{A}_\xi) \,.\, \mathbf{H} + (\mathrm{H}_\eta \mathrm{A}_\xi - \mathrm{H}_\xi \mathrm{A}_\eta) \,.\, \mathbf{K} + (\mathrm{H}_\xi \mathrm{K}_\eta - \mathrm{H}_\eta \mathrm{K}_\xi)\, \mathbf{A} = 0 \quad (21)$$

ove $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{K} = 0$ sono due curve fisse ed $\mathbf{A} = 0$ una curva, del sistema (10), variabile coi parametri A_{ik}.

« 9. Conviene, per non avere formule con un numero superfluo di coordinate, di prendere le equazioni (18) nella forma

$$z_{24} = 0\,, \qquad z_{34} = 0$$

allora sarà:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_\xi &= \xi_{24}\,, & \mathrm{H}_\eta &= \eta_{24}\,, & \mathbf{H} &= p_{24} \\ \mathrm{K}_\xi &= \xi_{34}\,, & \mathrm{K}_\eta &= \eta_{34}\,, & \mathbf{K} &= p_{34} \end{aligned}$$

epperò, come è

$$(\mathrm{H}_\eta \mathbf{K} - \mathrm{K}_\eta \mathbf{H})\xi_{i4} + (\mathrm{K}_\xi \mathbf{H} - \mathrm{H}_\xi \mathbf{K})\eta_{i4} + (\mathrm{H}_\xi \mathrm{K}_\eta - \mathrm{H}_\eta \mathrm{K}_\xi) p_{i4} = \begin{vmatrix} \xi_{i4} & \eta_{i4} & p_{i4} \\ \xi_{24} & \eta_{24} & p_{24} \\ \xi_{34} & \eta_{34} & p_{34} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 2, 3)$$

così le 6 formule (20) si riducono soltanto alle 4 seguenti

$$\left.\begin{aligned} z_1 &\equiv (\eta_{24} p_{34} - \eta_{34} p_{24}) \zeta_1 + (\xi_{34} p_{24} - \xi_{24} p_{34}) \chi_1 + (\xi_{24} \eta_{34} - \xi_{34} \eta_{24}) p_{12} \\ z_2 &\equiv (\eta_{24} p_{34} - \eta_{34} p_{24}) \zeta_2 + (\xi_{34} p_{24} - \xi_{24} p_{34}) \chi_2 + (\xi_{24} \eta_{34} - \xi_{24} \eta_{34}) p_{23} \\ z_3 &\equiv (\eta_{24} p_{34} - \eta_{34} p_{24}) \zeta_3 + (\xi_{34} p_{24} - \xi_{24} p_{34}) \chi_3 + (\xi_{24} \eta_{34} - \xi_{34} \eta_{24}) p_{31} \\ z_4 &\equiv (\eta_{24} p_{34} - \eta_{34} p_{24}) \zeta_4 + (\xi_{34} p_{24} - \xi_{24} p_{34}) \chi_4 + (\xi_{24} \eta_{34} - \xi_{34} \eta_{24}) p_{14} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ove le p_{ik} si intendono sostituite coi loro valori dati dalle (9), e dove noi ora abbiamo trovato conveniente di scrivere $\tau_1, \ldots, \tau_4$ al posto di $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{14}$ ($\tau \equiv z, \zeta, \chi$ e $\zeta \equiv \xi$, $\chi \equiv \eta$).

« 10. Al sistema di formule (22) corrisponde il sistema lineare rappresentativo:

$$(\eta_{24} p_{34} - \eta_{34} p_{24})\, a\zeta + (\xi_{34} p_{24} - \xi_{24} p_{34})\, a\chi + (\xi_{24} \eta_{34} - \xi_{34} \eta_{24})\, a_p = 0 \quad (23)$$

ove è

$$a_p = a_1 p_{12} + a_2 p_{23} + a_3 p_{31} + a_4 p_{14}$$

e sono $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ i parametri variabili colle curve del sistema. Ponendo, per brevità:

$$\alpha''_i = \chi_i \xi_{34} - \zeta_i \eta_{34}, \quad \beta''_i = \zeta_i \eta_{24} - \chi_i \xi_{24}, \quad \xi_{24} \eta_{34} - \xi_{24} \eta_{34} = \gamma \; (i = 1, \ldots, 4)$$

alla (23) possiamo dare la forma

$$\begin{aligned} a_1 (\gamma p_{12} + \alpha''_1 p_{24} + \beta''_1 p_{34}) + a_2 (\gamma p_{24} + \alpha''_2 p_{24} + \beta''_2 p_{32}) + \\ + a_3 (\gamma p_{31} + \alpha''_3 p_{24} + \beta''_3 p_{34}) + a_4 (\gamma p_{14} + \alpha''_4 p_{24} + \beta''_4 p_{34}) = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

« Si vede che questo sistema lineare è contenuto nel sistema (10); quindi se ne conclude che la superficie di cui esso rappresenta le sezioni piane, cioè la superficie di rappresentazione parametrica (22) è del 7° ordine, nel caso più generale, e possiede 9 rette. — Diciamo nel caso generale, perchè se, p. e., le ξ_{ik} fossero scelte per modo (e qui facciamo a meno della restrizione (16)) che esse fossero i valori presi dalle p_{ik} per un sistema $\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0$ di valori delle $\lambda : \mu : \nu$, allora, sul piano rappresentativo sarebbe $\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0$ un nuovo punto fondamentale; epperò la superficie rappresentata dalle (22) è del 6° ordine e possiede 10 rette.

« Supponendo che anche le η_{ik} siano un sistema di valori dati dalle (9) per un particolare sistema $\lambda'_0 : \mu'_0 : \nu'_0$ delle $\lambda : \mu : \nu$, interviene sul piano rappresentativo un 11° punto fondamentale e la superficie rappresentata dalla (22) è allora del 5° ordine con 11 rette.

« Si potrebbero da quanto precede cavar fuori altre interessanti conseguenze, sulle quali probabilmente ritorneremo. Pel momento vediamo come dal sistema **K** noi arriviamo ad una congruenza del 3° grado generabile come **K**.

§ IV.

Caso in cui il sistema K riducesi ad una congruenza del 3° grado.

« 11. Se la corrispondenza proiettiva fra (ξ) ed (S), fra (ξ') ed (S) è tale che al piano $\pi \equiv \xi\xi' S$ di (S) corrispondono due rette in (ξ), (ξ') giacenti in π, allora è chiaro, vista la genesi stessa di K, che da questo si stacca il piano rigato π, e che quindi, sostanzialmente, esso riducesi ad una congruenza del 3° grado. Per trovare allora quale modificazione subiscono i risultati precedenti, basta supporre che si abbia, p. e.:

$$p_\xi = p_{\xi'} = p_\alpha = p_{\alpha'} = 0$$

con che si ha semplicemente:

$$\begin{aligned} \Phi &= q_\beta \,.\, \mu^2 + r_\gamma \,.\, \nu^2 + (p_\beta + q_\alpha)\, \lambda\mu + (q_\gamma + r_\beta)\, \mu\nu + (r_\alpha + p_\gamma)\, \nu\lambda \\ \Psi &= q_{\beta'} \,.\, \mu^2 + r_{\gamma'} \,.\, \nu^2 + (p_{\beta'} + q_{\alpha'})\, \lambda\mu + (q_{\gamma'} + r_{\beta'})\, \mu\nu + (r_{\alpha'} + p_{\gamma'})\, \nu\lambda \end{aligned}$$

e le formule (9) diventano:

$$\begin{aligned} \varrho . p_{ik} = \Phi . \Psi . h_{ik} &- (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik})(\mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\, \Phi \\ &- (\lambda a'_{ik} + \mu b'_{ik} + \nu c'_{ik})(\mu q_\xi + \nu r_\xi)\, \Psi \\ &+ (\mu q_\xi + \nu r_\xi)(\mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'}) . \{ l_{ik} . \lambda^2 + m_{ik} . \mu^2 + n_{ik} . \nu^2 + \\ &+ (f_{ik} - f'_{ik})\, \mu\nu + (g_{ik} - g'_{ik})\, \nu\lambda + (e_{ik} - e'_{ik})\, \lambda\mu \} ; \qquad (9') \end{aligned}$$

e pel sistema lineare rappresentativo si ha:

$$\begin{aligned} \Phi . \Psi . A_h &- (\lambda A_a + \mu A_b + \nu A_c)(\mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\, \Phi \\ &- (\lambda A_{a'} + \mu A_{b'} + \nu A_{c'})(\mu q_\xi + \nu r_\xi)\, \Psi \\ &+ (\mu q_\xi + \nu r_\xi)(\mu q_{\xi'} + \nu r_{\xi'})\, \Theta_A = 0. \qquad (10') \end{aligned}$$

« È facile di vedere che per queste curve il punto $\mu = 0$, $\nu = 0$ è doppio a tangenti variabili, poichè il 1° membro della (10′) si annulla a 2° grado per $\mu = 0$, $\nu = 0$, e si ha per quelle tangenti l'equazione complessiva:

$$A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2 = 0$$

ove si è posto:

$$\begin{aligned} A &= A_l . q_\xi\, q_{\xi'} - A_a\, q_{\xi'}(p_\beta + q_\alpha) - A_{a'} . q_\xi (p_{\beta'} + q_{\alpha'}) \\ B &= A_l (q_\xi\, r_{\xi'} + q_{\xi'}\, r_\xi) - A_a \{ q_{\xi'} (r_\alpha + p_\gamma) + r_{\xi'} (p_\beta + q_\alpha) \} \\ &\qquad - A_{a'} \{ q_\xi (r_{\alpha'} + p_{\gamma'}) + r_\xi (p_{\beta'} + q_{\alpha'}) \} \\ C &= A_l . r_\xi\, r_{\xi'} - A_a\, r_{\xi'} (r_\alpha + p_\gamma) - A_{a'} . r_\xi (r_{\alpha'} + p_{\gamma'}). \end{aligned}$$

« Ne concludiamo che le congruenze del 3° grado le quali ammettono una generazione proiettiva per mezzo di due stelle reciprocamente riferite ad una terza, sono rappresentabili sul piano per mezzo di un sistema di curve del 4° ordine dotate di un punto doppio comune a tangenti variabili, e di 6 punti semplici. Questa ultima affermazione è giustificata da che le rigate della congruenza contenute nei diversi complessi lineari dello spazio sono del 6° grado ».