ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Di un doppio isomorfismo nella teorica generale delle sostituzioni.* Nota di GIOVANNI FRATTINI, presentata dal Socio BELTRAMI.

« Quello che chiamo doppio isomorfismo, con vocabolo del quale spiego la ragione nel n. 2 di questo lavoro, fornisce un mezzo efficacissimo per rivestire di forma analitico-funzionale lo studio dei gruppi di sostituzioni, e specialmente l'importante ricerca dei loro sottogruppi eccezionali. Ecco brevemente di che si tratta. — Supponendo che le sostituzioni di un gruppo, come quelle del gruppo lineare

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dipendano da certi parametri α, β, γ, δ ecc., varianti di sostituzione in sostituzione, la ricerca dei sottogruppi eccezionali si riduce, mercè il doppio isomorfismo, al problema seguente: Essendo noto un certo gruppo di *sostituzioni aritmetiche* sui parametri α, β, γ, δ ecc., trovarne tutti i sottogruppi dotati di un certo grado di generalità. Per il gruppo lineare, il gruppo noto di sostituzioni aritmetiche sui parametri α, β, γ, δ è il seguente:

$$\begin{array}{lll} (\alpha s - \beta r)\,\mathrm{M} + (\gamma s - \delta r)\,\mathrm{N} & (\text{sostituzione sulla } \alpha) & \\ (\beta m - \alpha n)\,\mathrm{M} + (\delta m - \gamma n)\,\mathrm{N} & (\quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad \beta) & \\ (\alpha s - \beta r)\,\mathrm{R} + (\gamma s - \delta r)\,\mathrm{S} & (\quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad \gamma) & [\mathrm{A}] \\ (\beta m - \alpha n)\,\mathrm{R} + (\delta m - \gamma n)\,\mathrm{S} & (\quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad \delta). & \end{array}$$

« Supponendo per semplicità che α, β, γ e δ siano numeri interi, variabili in tutto il campo definito dalla condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e che M, N, R, S, ed m, n, r, s siano due quaterne di numeri interi, variabili nei campi $\mathrm{MS} - \mathrm{NR} = 1$, $ms - nr = 1$, le [A] determinano un gruppo di sostituzioni aritmetiche, lineari e di determinante 1, sulle α, β, γ, δ [1]. Or bene: cono-

[1] Prescindendo per un momento dalla condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e supponendo che nelle [A] le lettere rappresentino numeri di qualsivoglia specie, è facile verificare che le sostituzioni [A] trasformano in sè medesima la forma quaternaria

$$\alpha\delta - \beta\gamma.$$

Ponendo

$$\alpha = x_2 + ix_3\,, \quad \delta = x_2 - ix_3\,, \quad \beta = x_1\,, \quad \gamma = x_4\,,$$

dal gruppo [A] si ricaverebbe quel gruppo riproduttivo della forma

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_4\,,$$

che, supponendone reali i coefficienti, fu recentemente studiato dal Bianchi nella Memoria: « *Sui gruppi di sostituzioni lineari* » (Math. Annalen, Bd. 42).

sciuto un sottogruppo del gruppo aritmetico [A], e supposto che m, n, r, s conservino in esso il significato che hanno nel gruppo generale [A], qual è quello di variabili intere *indipendenti*, non soggette cioè ad altra condizione fuorchè all'uguaglianza $ms - nr = 1$; supposto inoltre che le quantità M, N,

---

Il gruppo aritmetico [A], composto di sostituzioni lineari a determinante 1 che trasformano in sè medesimo il determinante di 2° ordine

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

mi porge occasione per dare qui sotto le formole relative a un certo gruppo aritmetico di sostituzioni lineari e a determinante 1 che trasformano in sè stesso il determinante generale d'ordine n

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

e che, per $n = 2$, si riduce al gruppo [A]. Quanto alla questione se il gruppo sia *totale*, se cioè comprenda tutte le sostituzioni aritmetiche lineari e a determinante 1 che trasformano il determinante generale d'ordine n in sè medesimo, spero di risolverla in una prossima Nota, servendomi appunto del doppio isomorfismo. Per ora do soltanto, senza dimostrazione, le formole relative al gruppo, formole che il lettore potrà verificare direttamente.

Posto

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

e inoltre

$$x_{pq} = \sum_{j=1}^{j=n} A_{pj} \sum_{i=1}^{i=n} a_{qi}\, x_{ji}\,,$$

si ha

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dunque, se nel determinante delle X si eseguisce su X_{pq} la sostituzione lineare

$$\sum_{j=1}^{j=n} A_{pj} \sum_{i=1}^{i=n} a_{qi}\, X_{ji}$$

R, S possano considerarsi come ottenute dalle m, n, r, s *mediante una trasformazione comprendente l'identità*, che cioè, essendo M, N, R, S funzioni di m, n, r, s, siano possibili le eguaglianze simultanee

$$M = m\,,\quad N = n\,,\quad R = r\,,\quad S = s \text{ (1)}, \qquad [B)$$

a quel sottogruppo corrisponderà un sottogruppo eccezionale del gruppo lineare. — E reciprocamente: ad ogni sottogruppo eccezionale del gruppo lineare corrisponde un sottogruppo del gruppo aritmetico [A]; e il grado di generalità di un tale sottogruppo, oltrechè dall'indipendenza delle m, n, r, s entro il campo $ms - nr = 1$, risulta dalla possibilità delle [B], dal potersi cioè considerare M, N, R, S come ottenute dalle m, n, r, s mediante una trasformazione comprendente l'identità.

« 1. Fondamento della presente Nota sono alcuni teoremi contenuti nella mia Memoria: « *I gruppi transitivi di sostituzioni dell'istesso ordine e grado* » [2]. Di essi ebbi già a far uso in altri lavori, e segnatamente nella Memoria: « *Intorno ad alcune proposizioni della teoria delle sostituzioni* » [3]. Li ricorderò brevemente, a fine di poter conseguire maggior chiarezza dipoi.

« Assumendo come rappresentatrice di una determinata sostituzione S di un gruppo Π la sostituzione (T, TS), la quale surroga ogni sostituzione T di Π con il prodotto TS, l'insieme delle sostituzioni (T, TS) sarà un gruppo

$$\pi' \equiv (\mathrm{T}, \mathrm{TS})$$

in isomorfismo oloedrico con Π [4]. Rappresentando S con la sostituzione $(\mathrm{T}, \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T})$, anche l'insieme delle sostituzioni $(\mathrm{T}, \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T})$ sarà un gruppo

$$\pi'' \equiv (\mathrm{T}, \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T})$$

in isomorfismo oloedrico con Π [5]. Immaginando che le sostituzioni di Π siano contrasegnate ciascuna da un indice, che supporrò eguale ad 1 per la sostituzione unitaria, le sostituzioni di π' e di π'' permuteranno fra loro gl'indici di quelle di Π. Ricorderò pertanto che:

---

il determinante si trasforma in sè medesimo. Il sistema delle sostituzioni lineari sulle X forma poi gruppo, ed è a determinante 1. Risulta inoltre dalla verificazione diretta, che, qualora si facesse astrazione dalle condizioni poste per i determinanti delle A e delle a, il determinante del sistema di sostituzioni sulle X risulterebbe eguale al prodotto delle n^{me} potenze di quei due: mentre il determinante delle X sarebbe il prodotto del determinante delle A e di quello delle a, moltiplicati per il determinante delle x.

(1) Questa condizione è per esempio soddisfatta ponendo $M \equiv m \pmod{a}$; $N \equiv n \pmod{b}$; $R \equiv r \pmod{c}$; $S \equiv s \pmod{d}$; essendo a, b, c, d numeri interi.

(2) Atti della R. Accademia dei Lincei, 1882-83.

(3) Atti della R. Accademia dei Lincei, 1883-84.

(4) Nelle citate mie Memorie esso vien detto gruppo *potenziale* di Π.

(5) Gruppo *antipotenziale* di Π, secondo le dette mie Memorie.

« 1° Due sostituzioni qualunque, l'una appartenente a π e l'altra a π'', sono permutabili fra loro.

« 2° Ad ogni sottogruppo di Π corrisponde una distribuzione degli elementi di π' o dei loro indici in sistemi d'imprimitività di π'', e degli elementi di π'' in sistemi d'imprimitività di π'. Le due distribuzioni hanno poi un sistema comune, composto degl' indici delle sostituzioni del sottogruppo che le determina.

« 3° Reciprocamente: Ad ogni distribuzione degli elementi di π' in sistemi d'imprimitività di π'', o degli elementi di π'' in sistemi d'imprimitività di π', corrisponde un sottogruppo di Π, composto delle sostituzioni i cui indici sono quelli del sistema principale, intendendo per sistema principale quello che contiene l'indice 1 della sostituzione unitaria.

« 4° Affinchè un sottogruppo di Π dia nascita a due distribuzioni identiche degli elementi di π' e π'' in sistemi d'imprimitività, è necessario e sufficiente che esso sia eccezionale in Π.

« Da quest'ultima proposizione s'inferisce che i sottogruppi eccezionali di Π corrispondono a distribuzioni degl'indici delle sostituzioni di esso Π in sistemi d'imprimitività comuni a π' e a π''; vale a dire in sistemi d'imprimitività del gruppo $\varDelta$ che risulta dalla combinazione di π' e di π''. Quanto alla forma di $\varDelta$, ricordando che ogni sostituzione di π' è permutabile con ciascuna sostituzione di π'', si trova facilmente che

$$\varDelta \equiv (\mathrm{T}, \mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{TS}_1)\,, \tag{C}$$

significando S ed S_1 due sostituzioni qualunque di Π, che, in ogni sostituzione di $\varDelta$, mentre T varia in tutto il campo Π, restano ferme.

« I sottogruppi eccezionali di Π corrispondono dunque ai sistemi d'imprimitività di $\varDelta$. D'altra parte, come ho dimostrato nell'appendice della seconda delle mie Memorie già citate, i sistemi d'imprimitività di un gruppo transitivo (e tale è il gruppo $\varDelta$) corrispondono univocamente ai sottogruppi di esso che contengono quello delle sostituzioni le quali non ispostano un elemento fissato ad arbitrio. *Perciò esisterà anche corrispondenza univoca fra i sottogruppi eccezionali di* Π *e quei sottogruppi di* $\varDelta$ *che contengono il gruppo delle sostituzioni che in esso* $\varDelta$ *non ispostano l'elemento* 1.

« Conosciuto che sia uno qualsiasi di siffatti sottogruppi di $\varDelta$, *le sostituzioni* $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{S}_1$ *onde l'unità può essere surrogata per effetto delle sostituzioni del sottogruppo medesimo, sono quelle che compongono il relativo sottogruppo eccezionale di* Π (v. l'appendice c. s.).

« 2. Il gruppo $\varDelta$ è duplicemente isomorfo al gruppo Π. Perchè, al variare simultaneamente di S e di S_1 in tutto il campo delle sostituzioni di Π, *senza che fra S ed* S_1 *siasi stabilito legame di sorta*, $\varDelta$ si conserva isomorfo a Π, tanto per rispetto ad S, come per rispetto ad S_1. Ponendo infatti

$$\varDelta' = (\mathrm{T}, \overset{-1}{\mathrm{S}'}\,\mathrm{TS}'_1)\,; \qquad \varDelta'' = (\mathrm{T}, \overset{-1}{\mathrm{S}''}\,\mathrm{TS}''_1)$$

e facendo il prodotto delle sostituzioni $\varDelta'$ e $\varDelta''$, si avrà

$$\varDelta'\varDelta'' = \big(\mathrm{T}, (\mathrm{S}'\mathrm{S}'')^{-1}\,\mathrm{T}\,(\mathrm{S}'_1\,\mathrm{S}''_1)\big), \qquad [\mathrm{D}]$$

formola che dimostra il doppio isomorfismo anzidetto.

« Se $\varPi$ è un gruppo le cui sostituzioni, a guisa di quelle del gruppo lineare, dipendano da certi parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ecc., l'espressione $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}_1$, oltre che da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ecc., dipenderà da due altre serie di quantità, m, n, r, s ecc., M, N, R, S ecc., valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, relativi ordinatamente ad S e ad S_1. Avverrà pertanto, che, facendo il prodotto $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}_1$ (prodotto che è anch'esso una sostituzione di $\varPi$ e perciò ha la stessa forma che T), ai parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ecc. relativi a T, sottentreranno quelli che sono relativi al suddetto prodotto, e che i nuovi parametri $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ecc., saranno funzioni delle quantità delle tre serie

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ ecc.};\ m,\ n,\ r,\ s \text{ ecc.};\ \mathrm{M},\ \mathrm{N},\ \mathrm{R},\ \mathrm{S} \text{ ecc.}$$

« Il sottentrare delle $\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'$ ecc. alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ecc., si potrà poi considerare come l'effetto di certe *sostituzioni aritmetiche* eseguite su quest'ultime quantità. L'insieme di tali sostituzioni forma un gruppo aritmetico $\varPhi$, perchè l'eguaglianza

$$\overset{-1}{\mathrm{S}''}\,\overset{-1}{\mathrm{S}'}\,\mathrm{T}\mathrm{S}'_1\,\mathrm{S}''_1 = (\mathrm{S}'\,\mathrm{S}'')\overset{-1}{\mathrm{T}}\,(\mathrm{S}'_1\,\mathrm{S}''_1),$$

mostra che la consecutiva applicazione delle due sostituzioni mediante le quali dai parametri di T si passa a quelli dei prodotti $\mathrm{S}'^{-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}'_1$, $\mathrm{S}''^{-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}''_1$, equivale a quella di un'unica sostituzione, evidentemente del medesimo tipo, mediante la quale si passa dai parametri di T a quelli del prodotto indicato dal secondo membro dell'eguaglianza medesima.

« Considerando per esempio il gruppo lineare, e ponendo

$$\mathrm{T} = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \quad \mathrm{S} = \left(z, \frac{mz + n}{rz + s}\right), \quad \mathrm{S}_1 = \left(z, \frac{\mathrm{M}z + \mathrm{N}}{\mathrm{R}z + \mathrm{S}}\right),$$

si trova con facili calcoli che, facendo il prodotto $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}_1$, i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ relativi a T si trasformano ordinatamente in

$$(\alpha s - \beta r)\,\mathrm{M} + (\gamma s - \delta r)\,\mathrm{N} = \alpha'$$
$$(\beta m - \alpha n)\,\mathrm{M} + (\delta m - \gamma n)\,\mathrm{N} = \beta'$$
$$(\alpha s - \beta r)\,\mathrm{R} + (\gamma s - \delta r)\,\mathrm{S} = \gamma'$$
$$(\beta m - \alpha n)\,\mathrm{R} + (\delta m - \gamma n)\,\mathrm{S} = \delta'.$$

« Queste formole forniscono pel gruppo lineare il gruppo aritmetico $\varPhi$, lineare e di determinante 1 per rispetto ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

« Il gruppo

$$\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}\right)$$

è poi isomorfo al gruppo

$$\left(z, \frac{mz+n}{rz+s}\right) \equiv \left(z, \frac{Mz+N}{Rz+S}\right)$$

per rispetto all'una e all'altra delle due quaterne di quantità M, N, R, S ed m, n, r, s; come risulterebbe d'altra parte esaminando il prodotto di due delle sue sostituzioni.

« 3. Si consideri di nuovo il gruppo [C], e si supponga che, mentre S varia liberamente nel campo di Π, S_1 varii anch'essa: ma come funzione di S a più valori; e che fra questi valori sia compresa la stessa S. Si supponga inoltre che la funzione S_1 della S sia isomorfa per rispetto ad S, che cioè, se S'_1 ed S''_1 sono valori della *funzione* S_1, corrispondenti ai valori S' ed S'' della *variabile indipendente* S, il prodotto $S'_1\,S''_1$ sia un valore di S_1 corrispondente al valore $S'S''$ della S. La [D] mostra che alla supposta relazione fra S ed S_1 corrisponderà un sottogruppo del gruppo generale Δ.

« Apparisce inoltre dalla [C] che un tal sottogruppo conterrà tutte le sostituzioni di Δ che non ispostano l'elemento $T=1$; perchè S_1 contiene per ipotesi S tra i suoi valori. Dunque, per il teorema scritto in corsivo nel n. 1 di questa Nota, alla supposta relazione fra S ed S_1 corrisponderà un sottogruppo eccezionale di Π. Questo sottogruppo sarà poi composto delle sostituzioni

$$S^{-1}\,S_1 \tag{E}$$

che nel gruppo Δ corrispondono all'elemento $T=1$ (¹). Reciprocamente, e per lo stesso teorema del n. 1, ad ogni sottogruppo eccezionale di Π corrisponderà un sottogruppo di Δ contenente l'*intero* gruppo delle sostituzioni che in esso Δ non ispostano l'elemento 1: e a ciò si richiede evidentemente, che la S possa variare *liberamente* entro il campo di Π; e che S_1 (funzione di S) contenga S e sia in isomorfismo con essa.

« 4. Se Π è un gruppo analitico, si riferiscano le cose dette nel numero precedente, non più al gruppo Δ, ma al noto gruppo Φ di sostituzioni aritmetiche sui parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ecc.; e si scorgerà facilmente che, supponendo le quantità m, n, r, s ecc. non legate fra loro da vincoli che non siano quelli imposti ad esse dalla natura stessa di Π; supponendo inoltre che M, N, R, S ecc. siano ciò che le m, n, r, s ecc. diventano per effetto di una trasformazione contenente l'identità, i sottogruppi eccezionali di Π corrisponderanno ai sotto-

(¹) Si noti che il sottogruppo non può coincidere col gruppo totale Π, e neppure ridursi all'unica sostituzione unitaria. Infatti, se il sottogruppo fosse il gruppo totale, il prodotto $S^{-1}S_1$ si potrebbe agguagliare ad ogni sostituzione di Π. Detta pertanto Σ una qualsiasi sostituzione di Π, si avrebbe $S_1 = S\Sigma$. Perciò S_1, ferma restando S, potrebbe assumere ogni possibile valore nel campo Π. Essa dunque non sarebbe *funzione* di S, contro l'ipotesi. Se poi il sottogruppo si riducesse all'unica sostituzione unitaria, talchè si avesse $S_1 = S$, la S_1 sarebbe funzione di S ad un solo valore, il che è anche contro l'ipotesi.

gruppi del gruppo aritmetico Φ. Un sottogruppo del gruppo Φ relativo al gruppo lineare, ossia del gruppo [A], si ottiene, per esempio, ponendo

$$\mathrm{M} \equiv m\,,\quad \mathrm{N} \equiv n\,,\quad \mathrm{R} \equiv r\,,\quad \mathrm{S} \equiv s \quad (\mathrm{mod.}\ a).$$

Ad esso, perchè non limita l'indipendenza delle m, n, r, s, e perchè queste quantità sono amplificate nelle M, N, R, S (si noti che le precedenti congruenze ammettono come caso particolare le eguaglianze $\mathrm{M}=m, \mathrm{N}=n, \mathrm{R}=r, \mathrm{S}=s$), corrisponde un sottogruppo eccezionale del gruppo lineare. Calcolando mediante la [E] i coefficienti d'un tale sottogruppo, risulta che esso si compone di quelle sostituzioni del gruppo lineare che sono congruenti all'identità (mod. a).

« In generale, cognito un sottogruppo del gruppo aritmetico [A], che, non limitando l'indipendenza delle m, n, r, s, le amplifichi nelle M, N, R, S, le sostituzioni

$$\left(z, \frac{m'z+n'}{r'z+s'}\right)$$

del relativo sottogruppo eccezionale del gruppo lineare, si conosceranno facendo uso dell'eguaglianza

$$\left(z, \frac{m'z+n'}{r'z+s'}\right) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}_1 = \left(z, \frac{mz+n}{rz+s}\right)^{-1}\left(z, \frac{\mathrm{M}z+\mathrm{N}}{\mathrm{R}z+\mathrm{S}}\right),$$

dalla quale si ricava, per i coefficienti m', n', r', s' del sottogruppo eccezionale,

$$\begin{aligned} m' &= \mathrm{M}s - \mathrm{N}r \\ n' &= \mathrm{N}m - \mathrm{M}n \\ r' &= \mathrm{R}s - \mathrm{S}r \\ s' &= \mathrm{S}m - \mathrm{R}n \end{aligned}$$ ».

Matematica. — *Sulla risoluzione della congruenza* $x^2 \equiv c \pmod{p^\lambda}$. Nota del prof. A. Tonelli, presentata dal Socio V. Cerruti.

« 1. In una Nota inserita in questi Rendiconti (¹) studiando la congruenza

$$(1) \qquad x^2 \equiv c \pmod{p^\lambda}$$

con p numero primo dispari della forma $2^s\alpha + 1$, dopo aver posto

$$\varphi(p^\lambda) = p^{\lambda-1}(p-1) = 2^s\alpha\, p^{\lambda-1} = 2^s\gamma$$

ho dimostrato che le radici della (1) potevano esser rappresentate, in ogni caso, dalla formula

$$(2) \qquad x \equiv \pm\, g^{\gamma\left\{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + \ldots + 2^{s-2}\varepsilon_{s-2}\right\}}\, c^{\frac{\gamma+1}{2}} \pmod{p^\lambda}$$

dove g è un non residuo di p ed $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-2}$ dei numeri i quali possono assumere solamente uno dei due valori 0, 1. Questa formula però, come già

(¹) Ser. V, vol. I, 1° semestre 1892.