ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

MDCIII

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

TAVOLA 3.ª

Soluzioni	Peso dell'acido cloridrico su 100 di etere	Acido Cloridrico Conducibilità specifica a 0°	Coefficiente di temperatura
1	7,26	0,000000000110	— 0,025
2	6,24	0,0000000000779	— 0,025
3	5,44	0,0000000000546	— 0,025
4	4,55	0,0000000000320	— 0,023
5	3,18	0,0000000000167	— 0,022

Matematica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota del dott. GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Corrispondente VOLTERRA.

« 1. Siano a, b le velocità con cui si propagano le vibrazioni trasversali e longitudinali; sia ϱ la densità del mezzo elastico, ed r la distanza di un dato punto x_1, y_1, z_1 del mezzo ad un altro punto qualunque x, y, z; posto allora:

$$L = -\varrho a^2,$$

$$u_1 = \frac{1}{r} + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad v_1 = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y}, \quad w_1 = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z},$$

$$u_2 = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y}, \quad v_2 = \frac{1}{r} + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad w_2 = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial y \, \partial z},$$

$$u_3 = \frac{u^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}, \quad v_3 = \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial y \, \partial z}, \quad w_3 = \frac{1}{r} + \frac{a^2 - b^2}{2b^2} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2},$$

le formule del Somigliana (¹), che dànno le componenti u_0, v_0, w_0 degli spostamenti in una deformazione qualsiasi in funzione delle componenti delle forze esterne ϱX, ϱY, ϱZ, delle componenti delle tensioni al contorno X_σ, Y_σ, Z_σ e delle componenti degli spostamenti al contorno u, v, w, possono scriversi:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -4\pi L u_0 &= \int_S \Sigma \varrho X u_1 \, dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma, \ (^2) \\ -4\pi L v_0 &= \int_S \Sigma \varrho X u_2 \, dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_2 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma, \\ -4\pi L w_0 &= \int_S \Sigma \varrho X u_3 \, dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_3 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

(¹) Annali di Matematica pura ed applicata, § II, T. XVII.

(²) $X_\sigma^{(1)}$, $Y_\sigma^{(1)}$, $Z_\sigma^{(1)}$; $X_\sigma^{(2)}, \ldots$; $X_\sigma^{(3)}, \ldots$ sono le tensioni al contorno σ corrispondenti rispettivamente agli spostamenti: u_1, v_1, w_1; $u_2, \ldots$; $u_3, \ldots$

« Ora il prof. Volterra nelle sue lezioni in corso di fisica matematica, proseguendo nell'analogia che presenta lo studio degli integrali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi con la teoria della funzione potenziale dei corpi a tre dimensioni, ha stabilito un teorema analogo a quello del Poisson. Partendo egli infatti dalle formule (1) e posto:

$$(2) \qquad \mathrm{M} = \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X}\, u_1\, d\mathrm{S}\,, \quad \mathrm{N} = \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X}\, u_2\, d\mathrm{S}\,, \quad \mathrm{P} = \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X}\, u_3\, d\mathrm{S}$$

dimostra che le tre funzioni:

$$-\frac{1}{4\pi \mathrm{L}}\mathrm{M}\,, \quad -\frac{1}{4\pi \mathrm{L}}\mathrm{N}\,, \quad -\frac{1}{4\pi \mathrm{L}}\mathrm{P}$$

soddisfano alle equazioni:

$$\mathrm{L}\Delta^2 h_1 + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \varrho \mathrm{X} \ [1]$$

$$\mathrm{L}\Delta^2 h_2 + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial \theta}{\partial y_1} = \varrho \mathrm{Y} \quad \left\{ \theta = \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z} \right\}$$

$$\mathrm{L}\Delta^2 h_3 + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial \theta}{\partial z_1} = \varrho \mathrm{Z}.$$

« Bisogna però notare che il metodo tenuto dal prof. Volterra, come pure i metodi analoghi a quelli che ordinariamente si tengono per dimostrare il teorema del Poisson, portano a delle condizioni molto restrittive per le funzioni ϱX, ϱY, ϱZ.

« Ma quello che interessa maggiormente riguardo al teorema del Poisson è, di stabilirlo ponendo il minor numero di condizioni per la funzione densità. A questo scopo il sig. Otto Hölder, il prof. Morera ed il sig. Kronecker hanno dato dei nuovi metodi di dimostrazione, i quali portano a risultati molto generali. Tra questi metodi ho trovato più semplice ed interessante quello del prof. Morera [2]; metodo che mi propongo di estendere al caso dell'elasticità, consigliato dal sig. prof. Volterra.

« 2. Dalla prima delle (2) si ha, derivando rispetto ad x_1:

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} = -\int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X} \frac{\partial u_1}{\partial x}\, d\mathrm{S}.$$

L'integrale al secondo membro è proprio; infatti se poniamo: $x - x_1 = r\cos\theta$, $y - y_1 = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $z - z_1 = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, si trova facilmente che $\lim_{r=0} r^2 \Sigma \varrho \mathrm{X} \frac{\partial u_1}{\partial x}$ è uguale ad una quantità finita.

« Indichiamo con $\varrho_0 \mathrm{X}_0$, $\varrho_0 \mathrm{Y}_0$, $\varrho_0 \mathrm{Z}_0$ i valori, supposti finiti, di ϱX, ϱY, ϱZ nel punto x_1, y_1, z_1 del corpo S, e poniamo:

$$\varrho \mathrm{X} = \varrho_0 \mathrm{X}_0 + (\varrho \mathrm{X} - \varrho_0 \mathrm{X}_0)\,, \quad \varrho \mathrm{Y} = \varrho_0 \mathrm{Y}_0 + (\varrho \mathrm{Y} - \varrho_0 \mathrm{Y}_0)\,,$$
$$\varrho \mathrm{Z} = \varrho_0 \mathrm{Z}_0 + (\varrho \mathrm{Z} - \varrho_0 \mathrm{Z}_0)\,;$$

(1) Il valore di K è uguale a $\varrho(2a^2 - b^2)$.

(2) Rendiconti dell'Istituto Lombardo, § II, T. XX.

la (3) allora si potrà scrivere:

$$(4)\qquad \frac{\partial M}{\partial x_1}=\Sigma\varrho_0 X_0\int_S\frac{\partial u_1}{\partial x}dS-\int_S\Sigma(\varrho X-\varrho_0 X_0)\frac{\partial u_1}{\partial x}dS.$$

Le funzioni $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial v_1}{\partial y}$, $\frac{\partial w_1}{\partial z}$ sono infinite nel punto (x_1, y_1, z_1), per cui non sappiamo se la somma:

$$\Sigma\varrho_0 X_0\int_S\frac{\partial u_1}{\partial x}dS$$

possa trasformarsi in una somma di integrali estesi in superficie (1). Se però isoliamo il punto di singolarità con una superficie s qualunque che lo contenga nel suo interno, chiamato S′ lo spazio rimanente che ha per contorno $\sigma+s$, possiamo scrivere:

$$\Sigma\varrho_0 X_0\int_{S'}\frac{\partial u_1}{\partial x}dS'=-\Sigma\varrho_0 X_0\int_{\sigma+s}u_1\frac{\partial x}{\partial n}d\sigma'=-\Sigma\varrho_0 X_0\int_\sigma u_1\frac{\partial x}{\partial n}d\sigma-$$

$$-\Sigma\varrho_0 X_0\int_s u_1\frac{\partial x}{\partial n}ds,$$

ossia:

$$\Sigma\varrho_0 X_0\int_{S'}\frac{\partial u_1}{\partial x}dS+\Sigma\varrho_0 X_0\int_\sigma u_1\frac{\partial x}{\partial n}d\sigma=-\Sigma\varrho_0 X_0\int_s u_1\frac{\partial x}{\partial n}ds;$$

ma poichè gli integrali $\int_S\frac{\partial u_1}{\partial x}dS$, $\int_S\frac{\partial v_1}{\partial x}dS$, $\int_S\frac{\partial w_1}{\partial x}dS$ sono proprî, si ha che il limite del primo membro di questa uguaglianza, per s uguale a zero, è determinato ed indipendente dalla legge di impiccolimento di s, lo stesso deve quindi accadere del secondo membro. Scelta allora per s una superficie sferica col centro nel punto (x_1, y_1, z_1) e di raggio R, avremo:

$$\Sigma\varrho_0 X_0\int_s u_1\frac{\partial x}{\delta n}ds=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\Big\{\varrho_0 X_0\Big(1+\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}^2\theta\Big)+$$

$$+\varrho_0 Y_0\Big(-\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\Big)+\varrho_0 Z_0\Big(-\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\Big)\Big\}\cos(nx)\operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

per cui:

$$\lim_{s=0}\Sigma\varrho_0 X_0\int_s u_1\frac{\partial x}{\partial n}ds=\lim_{R=0}R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\Big\{\varrho_0 X_0\Big(1+\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}^2\theta\Big)+$$

$$+\varrho_0 Y_0\Big(-\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\varphi\Big)+\varrho_0 Z_0\Big(-\frac{a^2-b^2}{2b^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\Big)\Big\}\cos(nx)\operatorname{sen}\theta\, d\theta=0;$$

(1) Il prof. Morera a questo riguardo, in principio della sua citata Memoria, enuncia una proposizione che è imperfetta, ma che non nuoce all'esattezza dei risultati a cui egli arriva.

quindi:

(5) $$\Sigma\varrho_0 X_0 \int_S \frac{\partial u_1}{\partial x} dS + \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma u_1 \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = 0.$$

La (4) si può dunque scrivere:

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma u_1 \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma - \int_S (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial u_1}{\partial x} dS = \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma u_1 \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma +$$
$$+ \int_S \Sigma(\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dS.$$

« 3. Trasportiamo il punto (x_1, y_1, z_1) parallelamente all'asse x nell'altro $(x_1 + \varDelta x_1, y_1, z_1)$, e introduciamo il simbolo $\varDelta$ per indicare le variazioni che ne seguono nelle diverse funzioni, avremo:

(6) $$\frac{\varDelta \dfrac{\partial M}{\partial x}}{\varDelta x_1} = \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\varDelta u_1}{\varDelta x_1} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma(\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\varDelta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1} dS.$$

Poichè (x_1, y_1, z_1) non è mai su σ, sarà evidentemente:

$$\lim_{\varDelta x_1 = 0} \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\varDelta u_1}{\varDelta x_1} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = \Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = -\Sigma\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma.$$

« Prima di passare al limite per il secondo integrale del secondo membro della (6) facciamo l'ipotesi che le funzioni ϱX, ϱY, ϱZ oltre a soddisfare alla condizione di essere integrabili lungo qualunque segmento rettilineo di S, sufficiente per l'esistenza delle derivate prime di M, siano tali che gli integrali:

$$\int_0^r \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} dr, \quad \int_0^r \frac{\varrho Y - \varrho_0 Y_0}{r} dr, \quad \int_0^r \frac{\varrho Z - \varrho_0 Z_0}{r} dr$$

si mantengono determinati e finiti lungo ogni raggio vettore uscente da (x_1, y_1, z_1). Allora dimostreremo che si ha:

(7) $$\lim_{\varDelta x_1 = 0} \int_S \Sigma(\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\varDelta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1} dS = \int_S \Sigma(\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dS.$$

« Osserviamo intanto che l'integrale del secondo membro è proprio. E per verificarlo basterà prendere $dS = r^2 d\sigma\, dr$.

« Per dimostrare che la formola (7) è vera, calcoliamo $\dfrac{\varDelta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1}$. Chiamato r_1 il raggio vettore che parte dal punto $(x_1 + \varDelta x_1, y_1, z_1)$, ed u'_1 la funzione di r_1 analoga alla u_1, abbiamo;

$$\varDelta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{x - x_1 - \varDelta x_1}{r_1^3} - \frac{x - x_1}{r^3} +$$
$$+ \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{x - x_1 - \varDelta x_1}{r_1^3} - \frac{x - x_1}{r^3}\right) - \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{(x - x_1 - \varDelta x_1)^3}{r_1^5} - \frac{(x - x_1)}{r^5}\right).$$

Per ogni punto del corpo S si ha $r \geq r_1$, oppure $r < r_1$. Indichiamo con S_1 la porzione di S in cui si ha $r \geq r_1$, con S_2 la porzione in cui si ha $r < r_1$. Allora se immaginiamo condotto un piano normalmente a Δx_1 per il suo punto di mezzo, il campo S_1 sarà quello in cui cade il polo $(x_1 + \Delta x_1, y_1, z_1)$ i punti del piano compresi; il campo S_2 sarà quello in cui cade il polo (x_1, y_1, z_1) i punti del detto piano esclusi. Quando si passa al limite per $\Delta x_1 = 0$, il piano si muoverà parallelamente a sè stesso avvicinandosi al punto (x_1, y_1, z_1), conseguentemente i due campi S_1, S_2 varieranno, ma la loro somma sarà sempre uguale a tutto il campo S.

« È importante osservare che nel campo S_1 si ha sempre

$$\left|\frac{\Delta x_1}{r}\right| \leq 2, \text{ nel campo } S_2 \left|\frac{\Delta x_1}{r_1}\right| < 2.$$

« Si trova, con un metodo analogo a quello del prof. Morera (l. c.):

$$(8) \quad \int_{S_1} (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\Delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta x_1} dS_1 =$$

$$= \Bigg[-\int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{dS_1}{r^2} + 2 \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^2}{r_1(r + r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r} + \frac{1}{r^2} \right) dS_1$$

$$- \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x) \Delta x_1}{r_1(r + r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r r_1} + \frac{1}{r^2} \right) dS_1 \Bigg] \left(1 + \frac{3\alpha}{2} \right) - \Bigg[-3 \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{r^2} \cdot \frac{dS_1}{r^2}$$

$$+ 3 \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x - x_1) \Delta x_1}{r^4} dS_1 - \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{\Delta x_1^2}{r^4} dS_1 + 2 \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^4}{r_1(r + r_1)} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^3 r_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 r_1^2} + \frac{1}{r r_1^3} + \frac{1}{r_1^4} \right) dS_1 - \int_{S_1} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^3 \Delta x_1}{r_1 (r + r_1)} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^3 r_1} + \frac{1}{r^2 r_1^2} + \frac{1}{r r_1^3} + \frac{1}{r_1^4} \right) dS_1 \Bigg] \frac{3\alpha}{2}.$$

Ciascuno degli integrali che compariscono nel secondo membro è uniformemente proprio; ossia tolto dal campo S_1 un campo sufficientemente piccolo s_1 contenente nel suo interno il punto di infinito, l'integrale corrispondente esteso ad s_1 si mantiene in valore assoluto inferiore ad una quantità positiva ε piccola a piacere, anche coll'indefinito impiccolire di Δx_1. Infatti per i primi tre basta ripetere i ragionamenti del Morera; per gli altri basta osservare che si ha: $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} \left|\frac{x - x_1}{r}\right| = \left|\cos\theta\right| \leq 1$, $\left|\frac{\Delta x_1}{r}\right| \leq 2$, $\frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^4}{r_1^3 (r + r_1)} \leq 1$, $\left|\frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^3 \Delta x_1}{r_1^3 (r_1 + r)}\right| \leq 1$, $\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^3 r_1} + \frac{1}{r^2 r_1^2} + \frac{1}{r r_1^3} + \frac{1}{r_1^4} \leq \frac{5}{r_1^4}$.

« Similmente si trova per l'integrale esteso allo spazio S_2:

$$(9)\quad \int_{S_2} (\varrho X - \varrho_0 X_0)\, \frac{\Delta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta x_1}\, dS_2 =$$

$$= \Bigg[-\int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{dS_2}{r^2} + 2 \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)^2}{r_1 (r + r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r} + \frac{1}{r^2} \right) dS_2$$

$$- \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)\, \Delta x_1}{r_1 (r + r_1)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r} + \frac{1}{r^2} \right) dS_2 \Bigg] \left(1 + \frac{3\alpha}{2} \right) - \Bigg[-3 \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r_1} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{r_1^2} \cdot \frac{dS_7}{r_1^2}$$

$$+ 3 \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x - x_1)}{r_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{r_1} \cdot \frac{dS_2}{r_1^2} - \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r_1} \cdot \frac{\Delta x_1^2}{r_1^4} dS_2 + 2 \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x_1 - x)^3}{r + r_1} \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)}{r_1} \left(\frac{1}{r_1^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_1^3 r} + \frac{1}{r_1^2 r^2} + \frac{1}{r_1 r^3} + \frac{1}{r^4} \right) dS_2 - \int_{S_2} \frac{\varrho X - \varrho_0 X_0}{r} \cdot \frac{(x_1 + \Delta x_1 - x)\Delta x_1}{r_1 (r + r_1)} \cdot \frac{(x_1 - x)^3}{r} \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_1^3 r} + \frac{1}{r_1^2 r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_1 r^3} + \frac{1}{r^4} \right) dS_2 \Bigg] \frac{3\alpha}{2}\,.$$

Gli integrali del secondo membro della precedente uguaglianza sono tutti uniformemente proprî; infatti i primi tre sono simili ai primi tre della (8); gli altri risultano proprî dall'osservare che si ha:

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{r_1}, \quad \left| \frac{x - x_1}{r_1} \right| < \left| \frac{x - x_1}{r} \right| = \cos\theta \leq 1, \quad \left| \frac{\Delta x_1}{r_1} \right| < 2,$$

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_1^3 r} + \frac{1}{r_1^2 r^2} + \frac{1}{r_1 r^3} + \frac{1}{r^4} \leq \frac{5}{r^4}, \quad \left| \frac{x_1 + \Delta x_1 - x}{r + r_1} \right| \leq 1.$$

« Se indichiamo con S'_1, S'_2 ciò che divengono i due campi S_1, S_2, quando il piano normale a Δx_1 è arrivato in (x_1, y_1, z_1), avremo:

$$S = S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2,$$

$$\lim_{\Delta x_1 = 0} \int_S (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\Delta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta x_1} dS = \lim_{\Delta x_1 = 0} \int_{S_1} (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\Delta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta x_1} dS_1 +$$

$$\lim_{\Delta x_1 = 0} \int_{S_2} (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\Delta \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\Delta x_1} dS_2\,.$$

« Gli integrali che compariscono nei secondi membri delle (8) e delle (9), come abbiamo veduto, sono uniformemente proprî; per cui, supposto Δx_1 minore di un certo limite, possiamo dal campo S togliere un campo $s = s_1 + s_2$ contenente nel suo interno i punti (x_1, y_1, z_1), $(x_1 + \Delta x_1, y_1, z_1)$, in modo che gli integrali estesi ai nuovi campi $S_1 - s_1$, $S_2 - s_2$ differiscano rispettivamente dagli integrali (8), (9) di tanto poco quanto si vuole. Posto ciò, gli integrali che contengono sotto il segno di integrazione il fattore Δx_1, estesi rispettivamente ai campi $S_1 - s_1$, $S_2 - s_2$ possono rendersi minori di qualunque grandezza assegnabile per Δx_1 sufficientemente piccolo, al limite quindi per $\varDelta x_1 = 0$ gli integrali analoghi estesi ai campi S_1, S_2 vanno a zero. Abbiamo dunque:

$$\lim_{\varDelta x_1=0} \int_S (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\varDelta \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1} dS = \int_S (\varrho X - \varrho_0 X_0) \Big\{ -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-x_1)^2}{r^5} +$$

$$+\frac{3\alpha}{2}\Big(-\frac{1}{r^3} + 6\frac{(x-x_1)}{r^5} - 5\frac{(x-x_1)^4}{r^7}\Big)\Big\} dS = \int_S (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dS.$$

« Analogamente si potrebbe dimostrare che

$$\lim_{\varDelta x_1=0} \int_S (\varrho Y - \varrho_0 Y_0) \frac{\varDelta \frac{\partial v_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1} dS = \int_S (\varrho Y - \varrho_0 Y_0) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} dS,$$

$$\lim_{\varDelta x_1=0} \int_S (\varrho Z - \varrho_0 Z_0) \frac{\varDelta \frac{\partial w_1}{\partial x_1}}{\varDelta x_1} dS = \int_S (\varrho Z - \varrho_0 Z_0) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} dS;$$

sicchè possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} = -\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dS,$$

e così:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y_1^2} = -\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} dS,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z_1^2} = -\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} dS,$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial y_1} = -\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial y_1} dS,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial z_1} = -\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma + \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial z_1} dS.$$

« Posto dunque:

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{\partial N}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial z_1} = \theta,$$

avremo:

$$L\varDelta^2 M + (L+K)\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -L\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} d\sigma - (L+K)\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\Big) d\sigma$$

$$+ L \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \varDelta^2 u_1 dS + (L+K) \int_S \Sigma (\varrho X - \varrho_0 X_0) \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_3}{\partial z_1}\Big) dS.$$

$$= -L\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n} d\sigma - (L+K)\Sigma \varrho_0 X_0 \int_\sigma \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\Big) d\sigma.$$

« Si ha intanto:

$$\mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) - \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} ,$$

$$\mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Y}_0 \frac{\partial v_1}{\partial n} = \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Y}_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) - \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Y}^0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} ,$$

$$\mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Z}_0 \frac{\partial w_1}{\partial n} = \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Z}_0 \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial w_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) - \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Z}_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} ,$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\varDelta^2 \mathrm{M} + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = & - \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \\
& - (2\mathrm{L}+\mathrm{K})\varrho_0 \mathrm{X}_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma + \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{X}_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma \\
& - (2\mathrm{L}+\mathrm{K})\varrho_0 \mathrm{Y}_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma + \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Y}_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \\
& - (2\mathrm{L}+\mathrm{K})\varrho_0 \mathrm{Z}_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial w_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma + \mathrm{L}\varrho_0 \mathrm{Z}_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma .
\end{aligned}$$

« Osserviamo che la formula (5) l'abbiamo stabilita indipendentemente dai valori di $\varrho_0 \mathrm{X}_0$, $\varrho_0 \mathrm{Y}_0$, $\varrho_0 \mathrm{Z}_0$, sicchè possiamo scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_\mathrm{S} u_1 \, d\mathrm{S} = \int_\mathrm{S} \frac{\partial u_1}{\partial x} d\mathrm{S} = - \int_\sigma u_1 \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma$$

e così:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_\mathrm{S} u_1 \, d\mathrm{S} = \int_\mathrm{S} \frac{\partial u_1}{\partial y} d\mathrm{S} = - \int_\sigma u_1 \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma .$$

« Derivando la prima delle precedenti formule rispetto ad y, la seconda rispetto ad x, otteniamo:

$$\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma .$$

« Si ha quindi, tenendo conto delle formule analoghe alla precedente:

$$L\Delta^2 M + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = -L\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma \,-$$

$$-(2L+K)\varrho_0 X_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma + L\varrho_0 X_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma$$

$$-(2L+K)\varrho_0 Y_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma + L\varrho_0 Y_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\, d\sigma$$

$$-(2L+K)\varrho_0 Z_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma + L\varrho_0 Z_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\, d\sigma .$$

ma:

$$(2L+K)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right) = (2L+K)\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$(2L+K)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) = L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$(2L+K)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}+\frac{\partial w_3}{\partial z}\right) = L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z},$$

dunque:

$$L\Delta^2 M + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = -4\pi L\varrho_0 X_0 + L\varrho_0 X_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$+ L\varrho_0 Y_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$+ L\varrho_0 Z_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}\right) d\sigma =$$

$$= -4\pi L\varrho_0 X_0 .$$

« Similmente:

$$L\Delta^2 N + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial y_1} = -4\pi L\varrho_0 Y, \quad L\Delta^2 P + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial z_1} = -4\pi L\varrho_0 Z_0 \text{ ».}$$