ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

stenne uno di noi (il Grassi) sulla morfologia della colonna vertebrale. Il corpo vertebrale si forma attorno alle membrane della corda e non dalle membrane della corda, come altri ha creduto. Esso comincia a formarsi nei Leptocefali al terzo stadio sopradetto. Però la membrana interna della corda presentasi differenziata in regioni vertebrali ed intervertebrali: il qual fatto è certamente molto importante dal punto di vista morfologico.

« Notevolissimo si è lo scheletro gelatinoso: esso forma quasi un doppio astuccio non segmentato attorno agli organi assili (midollo spinale, corda, vasi principali): l'astuccio interno è assai più rigido e più sottile dell'esterno, l'uno intimamente riunito all'altro.

« Lo scheletro gelatinoso dei Murenoidi trova riscontro nella coda delle Appendicolarie, tracce dello stesso scheletro riscontransi in altri Teleostei, nei Selaci e nell'Anfiosso. Perciò abbiamo forse sottocchi una disposizione morfologica avente grande valore filogenetico.

« L'impiccolimento del corpo, che verificasi durante le metamorfosi sopra accennate, non avviene ugualmente in tutti gli organi.

« Risalta molto l'accorciamento delle fibre muscolari striate dei miomeri.

N. B. Dopochè erano già state corrette le bozze della presente Nota, il dott. Facciolà ha pubblicato un'altra Memoria, nella quale collo stesso metodo induttivo, onde dieci anni fa ha foggiate molte nuove specie di Leptocefali, ora viene a conchiudere con noi che si tratta di larve normali. Al *Conger mystax* riferisce gli stessi leptocefali, che noi già prima gli avevamo attribuiti in parte induttivamente e in parte sperimentalmente e che in questa seconda Nota gli abbiamo attribuiti tutti quanti in via sperimentale. Al *Conger vulgaris* riferisce (oltre al Loptocefalo Morrisi) il *L. inaequalis* Facciolà: dalla descrizione nuova datane dal Facciolà stesso risulta *ad evidentiam*, che questa nuova specie era stata da lui fabbricata a spese dei *L. punctatus* e *stenops*, quali sono descritti dal Bellotti. Perciò in questa parte i risultati del Facciolà s'accordano coi nostri. Naturalmente egli non cita affatto le nostre ricerche.

Matematica. — *Sopra i sistemi di rette cremoniani.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio Cerruti.

« In questa Nota, procedendo con metodo analogo a quello tenuto in un precedente lavoro (1), io tratto di una doppia classe di sistemi algebrici di rette, e di una corrispondente doppia classe di superficie omaloidi. Appartengono alla prima classe le note congruenze cremoniane (2), ed appartengono

(1) *Sopra un sistema di rette* (3, 4). Questi Rend., marzo 1893.

(2) Queste congruenze vennero considerate, e così denominate dall'Hirst. Cfr. *On the cremonian congruences,* nei Proceedings of the London Math. Society, an. 1883.

alla seconda i sistemi prodotti da una terna di forme di 2^a specie in corrispondenza birazionale allo stesso modo come il sistema (3, 4) del lavoro suaccennato venne prodotto per forme proiettive. Anche a questi ultimi sistemi conviene dare il nome di *cremoniani*; ma, per distinguerli dai primi, noi diremo gli uni di *1ª specie* e gli altri di *2ª specie*. Il lettore vedrà che il sistema di formule che incontreremo importa simultaneamente lo studio di entrambe le specie di sistemi.

§ I.

Due monoidi. — I sistemi di rette cremoniani di 2^a specie.

« 1. Siano

$$(1) \qquad \chi_1 \varphi_1 + \chi_2 \varphi_2 + \chi_3 \varphi_3 = 0$$

$$(2) \qquad \chi_1 \varphi'_1 + \chi_2 \varphi'_2 + \chi_3 \varphi'_3 = 0$$

$$(3) \qquad \chi_1 \theta_1 + \chi_2 \theta_2 + \chi_3 \theta_3 = 0$$

ove le $\varphi, \varphi', \theta$ sono funzioni omogenee di tre parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e χ_1, χ_2, χ_3 sono numeri arbitrarii variabili, le equazioni di tre reti omaloidiche di elementi, e poniamo le equazioni

$$z_i \equiv \sigma\xi_i + \tau\eta_i \ldots \quad 1') \qquad , \qquad z'_i \equiv \sigma'\xi'_i + \tau'\eta'_i \ldots \quad 2')$$

con $a)$ $\qquad \eta_i = \varphi_1 \alpha_i + \varphi_2 \beta_i + \varphi_3 \gamma_i$

$a')$ $\qquad \eta'_i = \varphi'_1 \alpha'_i + \varphi'_2 \beta'_i + \varphi'_3 \gamma'_i \qquad (i = 1, \ldots, 4)$

e $\quad (3')$ $\qquad \theta_1 p_x + \theta_2 q_x + \theta_3 r_x = 0$

ove ξ_i, ξ'_i sono le coordinate di due punti arbitrarii, $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ equazioni di tre piani arbitrarii, $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ le coordinate dei vertici di un triangolo arbitrario il cui piano non passi per ξ_i, ed $\alpha'_i \beta'_i \gamma'_i$ quelle dei vertici di un triangolo analogo rispetto ad ξ'_i. Per mezzo delle 1') e 3') la stella (ξ_i) è riferita cremonianamente alla stella di piani (ξ''_i), ove $\xi''_i = (pqr)_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$; e lo stesso accade fra le stelle (ξ'_i), (ξ''_i) per mezzo delle 2') e 3'). Se si suppone che le φ siano dell'ordine n, le φ' dell'ordine n', e le θ dell'ordine m nelle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; e se, inoltre, si suppone che vi siano α_{rs} elementi $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ fondamentali r^{pli} per la rete 1), e fondamentali s^{pli} per la rete 3), noi avremo

$$(4) \qquad (\xi_i)\ \mathfrak{C}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{R}}(\xi''_i)$$

$$\mathrm{M} = mn - \Sigma\, \alpha_{rs}\, rs\,, \ (r = 0, 1, \ldots, n-1\,;\ s = 0, 1, \ldots, n-1)\ (^1)$$

ove, per brevità, abbiamo creduto introdurre il simbolo $\mathfrak{C}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{R}}$ per rappresentare la relazione cremoniana reciproca che lega le stelle (ξ_i), (ξ''_i) allo stesso modo come il simbolo $\overline{\wedge}$ rappresenta la semplice relazione lineare.

(1) Cfr. Iung, *Sulle trasformazioni birazionali* ecc. Rend. Ist. lomb., a. 1886. Si osservi che le nostre limitazioni pei valori di r, s non sono quelle del Iung; ma, mentre tali limitazioni non infirmano il valore di M, sono necessarie per noi, specialmente pel contenuto dei numeri 2 e 4.

« In modo analogo si ha

$$(4') \qquad (\xi'_i)\, \mathfrak{C}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{M}'}\, (\xi''_i)$$

$$\mathrm{M}' = mn' - \Sigma\, \alpha'_{r's'}\, r's'\,, \; (r' = 0\,, 1\,, \ldots\,, n-1\,;\; s' = 0\,, 1\,, \ldots\,, n-1)$$

ove $\alpha'_{r's'}$, r', s' hanno, rispetto alle reti 2) e 3), significato analogo a quello delle α_{rs}, r, s rispetto alle reti 1) e 3).

« 2. Per mezzo della (4), e dal cercare le intersezioni degli elementi corrispondenti, si genera una superficie di rappresentazione parametrica

$$(5) \qquad z_i \equiv (\theta_1\, p_\eta + \theta_2\, q_\eta + \theta_3\, r_\eta)\, \xi_i - (\theta_1\, p_\xi + \theta_2\, q_\xi + \theta_3\, r_\xi)\, \eta_i \qquad (i = 1\,, \ldots\,, 4)\,;$$

e queste formule dànno, pel sistema lineare rappresentativo delle sezioni piane di essa superficie, la equazione:

$$(6) \qquad (\theta_1\, p_\eta + \theta_2\, q_\eta + \theta_3\, r_\eta)\, \mathrm{A}_\xi - (\theta_1\, p_\xi + \theta_2\, q_\xi + \theta_3\, r_\xi)\, \mathrm{A}_\eta = 0$$

ove $\mathrm{A}_1 : \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_3 : \mathrm{A}_4$ sono parametri variabili colle curve del sistema.

« Questa equazione mostra che i punti fondamentali del sistema rappresentativo sono, oltre quelli corrispondenti agli α_{rs} elementi multipli delle reti 1) e 3) quegli altri, fuori di essi, comuni alle curve

$$\theta_1\, p_\eta + \theta_2\, q_\eta + \theta_3\, r_\eta = 0 \;\;,\;\; \theta_1\, p_\xi + \theta_2\, q_\xi + \theta_3\, r_\xi = 0$$

e questi sono in numero eguale ad

$$\mathrm{N} = (m+n)\, m - \Sigma\, s\, (r+s)\, \alpha_{rs}\,.$$

« Cosicchè, essendo le curve (6) dell'ordine $m+n$, l'ordine della superficie rappresentata, superficie che diremo Σ, sarà

$$= (m+n)^2 - \Sigma\, (r+s)^2 \alpha_{rs} - (m+n)\, m + \Sigma s\, (r+s) \alpha_{rs}$$
$$= mn - \Sigma\, rs\, \alpha_{rs} + n^2 - \Sigma\, r^2\, \alpha_{rs} = \mathrm{M} + 1 = \mathrm{N}$$

per essere, giusta la ipotesi fatta della omaloidicità della rete (1):

$$n^2 - \Sigma\, r^2\, \alpha_{rs} = 1\,.$$

« In modo analogo, per mezzo della (4′) si genera una superficie Σ' di rappresentazione parametrica

$$(5') \qquad z_i \equiv (\theta_1\, p_{\eta'} + \theta_2\, q_{\eta'} + \theta_3\, r_{\eta'})\, \mathrm{A}_\xi - (\theta_1\, p_\xi + \theta_2\, q_\xi + \theta_3\, r_\xi)\, \mathrm{A}_{\eta'}$$

di sistema lineare rappresentativo

$$(6') \qquad (\theta_1\, p_{\eta'} + \theta_2\, q_{\eta'} + \theta_3\, r_{\eta'})\, \mathrm{A}_\xi - (\theta_1\, p_{\xi'} + \theta_2\, q_{\xi'} + \theta_3\, r_{\xi'})\, \mathrm{A}_{\eta'} = 0$$

e di ordine

$$= (m+n')^2 - \Sigma\, (r'+s')^2\, \alpha'_{r's'} - (m+n')\, m + \Sigma\, s'\, (r'+s')\, \alpha'_{r's'}$$
$$= mn' - \Sigma\, r's'\, \alpha'_{r's'} + n'^2 - \Sigma\, r'^2 s'_{r's'} = \mathrm{M}' + 1 = \mathrm{N}'$$

« E così noi arriviamo intanto, in una maniera diversa da quella tenuta da Jung ([1]), il quale procede per via sintetica al risultato che la superficie generata da due stelle in corrispondenza cremoniana reciproca del grado M è un monoide dell'ordine $\mathrm{M}+1$; anzi qui noi diamo delle formule semplici e nello stesso tempo generali per lo studio di un tal monoide.

« 3. Per mezzo delle (5) il monoide Σ è proiettato stereograficamente

([1]) *Sulle superficie generate da due sistemi cremoniani reciproci di grado m.* Rend. Acc. Lincei. An. 1885.

dal punto ξ_i sul piano $\sigma \equiv (\alpha\,\beta\,\gamma\,x) = 0$, e per mezzo delle (5′) è, invece, proiettato stereograficamente il monoide Σ' dal punto ξ'_i sul pian $\sigma' = (\alpha'\beta'\gamma' x) = 0$. Facendo dunque intervenire la relazione cremoniana $(\xi_i)\,\mathfrak{C}^{\mathrm{P}}\,(\xi'_i)$, ove

$$\mathrm{P} = nn' - \Sigma\, r'' s''\, \alpha''_{r''s''}$$

ed ove $\alpha''_{r''s''}$, r'', s'' hanno, rispetto ad (1) ed (1′), significato analogo a quello che avevano α_{rs}, r, s rispetto ad 1) e 3); e dicendo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ le due proiezioni sterreografiche suaccennate, si può dire che i sistemi di rette cremoniani di 2ª specie, sistemi che indicheremo col simbolo $\mathrm{K}_{\mu,\nu}$ ($\mu =$ ordᵉ., $\nu =$ classe) sono quelli che provengono dal congiungere i punti di Σ ai corrispondenti di Σ' nella successione $\mathfrak{P}_1\,\mathrm{C}\,\mathfrak{P}_2^{-1}$, dove per C deve ora intendersi la $(\sigma)\,\mathfrak{C}^{\mathrm{P}}\,(\sigma')$ sezione della $(\xi)\,\mathfrak{C}^{\mathrm{P}}\,(\xi')$ con σ, σ' (¹).

« Procedendo quindi come al nº. 1 della mia Nota citata, o addirittura operando sulle (5) e (5′), e ponendo

$$\begin{aligned}
&p_\alpha = \mathrm{P}_1\,, p_\beta = \mathrm{P}_2\,, p_\gamma = \mathrm{P}_3 \quad , \quad p_{\alpha'} = \mathrm{P}'_1\,, p_{\beta'} = \mathrm{P}'_2\,, p_{\gamma'} = \mathrm{P}'_3\\
&q_\alpha = \mathrm{Q}_1\,, q_\beta = \mathrm{Q}_2\,, q_\gamma = \mathrm{Q}_3 \quad , \quad q_{\alpha'} = \mathrm{Q}'_1\,, q_{\beta'} = \mathrm{Q}'_2\,, q_{\gamma'} = \mathrm{Q}'_3\\
&r_\alpha = \mathrm{R}_1\,, r_\beta = \mathrm{R}_2\,, r_\gamma = \mathrm{R}_3 \quad , \quad r_{\alpha'} = \mathrm{R}'_1\,, r_{\beta'} = \mathrm{R}'_2\,, r_{\gamma'} = \mathrm{R}'_3
\end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \theta_1\,\mathrm{P}_\varphi + \theta_2\,\mathrm{Q}_\varphi + \theta_3\,\mathrm{R}_\varphi \\ \mathrm{X}' = \theta_1\,\mathrm{P}'_{\varphi'} + \theta_2\,\mathrm{Q}'_{\varphi'} + \theta_3\,\mathrm{R}'_{\varphi'} \end{cases}$$

noi abbiamo, a rappresentare le rette di $\mathrm{K}_{\mu,\nu}$, le formule

$$\begin{aligned}
(9)\quad p_{ik} \equiv \mathrm{XX}'(\xi\xi')_{ik} &- \mathrm{X}\,(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})\,(\xi\eta')_{ik}\\
&- \mathrm{X}'\,(\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)\,(\eta\xi')_{ik}\\
&+ \quad (\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)\,(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})\,(\eta\eta')_{ik}\\
&\qquad\qquad (ik = 12\,, \ldots, 34).
\end{aligned}$$

« Se poniamo anche qui (cfr. Nota cit.)

$$(\xi\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma)\,(\xi'\,,\alpha'\,,\beta'\,,\gamma') \equiv h\,, a\,, b\,, c\,, a'\,, l\,, e\,, g'\,, b'\,, e'\,, m\,, e'\,, g\,, f'\,, n$$

e poi indichiamo coi medesimi simboli muniti di opportuni indici le coordinate delle rette che essi rappresentano, noi avremo

$$\begin{aligned}
(\xi\eta')_{ik} &= \varphi'_1\,a_{ik} + \varphi'_2\,b_{ik} + \varphi'_3\,c_{ik}\\
(\eta\xi')_{ik} &= \varphi_1\,a'_{ik} + \varphi_2\,b'_{ik} + \varphi_3\,c'_{ik}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\ (\eta\eta')_{ik} = l_{ik}\,\varphi_i\varphi'_i + m_{ik}\,\varphi_2\varphi'_2 + n_{ik}\,\varphi_3\varphi'_3 + e_{ik}\,\varphi_1\varphi'_2 - e'_{ik}\,\varphi_2\varphi'_1 + f_{ik}\,\varphi_2\varphi_3' +\\
- f'_{ik}\,\varphi_3\varphi'_2 + g_{ik}\,\varphi_3\varphi'_1 - g'_{ik}\,\varphi_1\varphi'_3
\end{aligned}$$

epperò le formule (9) si potranno scrivere, sotto forma più esplicita, come segue:

$$\left.\begin{aligned}
(10)\quad p_{ik} \equiv \mathrm{XX}' h_{ik} &- \mathrm{X}\,(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})(\varphi_1 a'_{ik} + \varphi_2 b'_{ik} + \varphi_3 c'_{ik})\\
&- \mathrm{X}'(\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)(\varphi'_1 a_{ik} + \varphi'_2 b_{ik} + \varphi'_3 c_{ik})\\
&+ (\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)\,(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'}) \times\\
\times &\begin{cases} +(l_{ik}\varphi_1\varphi'_1 + m_{ik}\varphi_2\varphi'_2 + n_{ik}\varphi_3\varphi'_3\\ +e_{ik}\varphi_1\varphi'_2 - e'_{ik}\varphi_2\varphi'_1 + f_{ik}\varphi_2\varphi'_3 - f'_{ik}\varphi'_2\varphi_3 + g_{ik}\varphi_3\varphi'_1 - g'_{ik}\varphi_1\varphi'_3) \end{cases}
\end{aligned}\right\} (ik = 12\,, \ldots, 34).$$

(¹) Per uno studio intorno ai sistemi di rette che si hanno dal congiungere i punti omologhi di due superficie che si corrispondono univocamente (ma che non ha che fare col contenuto del presente scritto) si può confrontare la Memoria del sig. Marino Pannelli, inserita negli Atti della R. Acc. dei Lincei an. 1890.

« Indicando con A_μ l'invariante simultaneo del complesso lineare di coordinate A_{ik} e della retta di coordinate μ_{ik} ($\mu = h, a, b, \ldots, g, f', n$; $ik = 12, \ldots, 34$), si ha pel sistema lineare rappresentativo di $K_{\mu,\nu}$ la equazione

$$\begin{aligned}
&XX'A_h - X(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})(\varphi'_1 A_a + \varphi'_2 A_b + \varphi'_3 A_c) \\
&\quad - X'(\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)(\varphi_1 A_{a'} + \varphi_2 A_{b'} + \varphi_3 A_{c'}) \\
(11)\qquad &\quad + (\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})\Theta_A = 0
\end{aligned}$$

dove ora abbiamo trovato conveniente di porre

$$\begin{aligned}
(12)\qquad \Theta_A = {} & A_l \varphi_1 \varphi'_1 + A_m \varphi_2 \varphi'_2 + A_n \varphi_3 \varphi'_3 + A_e \varphi_1 \varphi'_2 - A_{e'} \varphi_2 \varphi'_1 + \\
& + A_f \varphi_2 \varphi'_3 - A_{f'} \varphi_3 \varphi'_2 + A_g \varphi_3 \varphi'_1 - A_{g'} \varphi'_3 \varphi_1 .
\end{aligned}$$

§ II.

I sistemi di rette cremoniani di 1ª specie ed altri enti.

« 4. Per mezzo delle a), a'), che possono pure essere sostituite dalle

$$\varphi_1 u_\alpha + \varphi_2 u_\beta + \varphi_3 u_\gamma = 0$$
$$\varphi'_1 u_{\alpha'} + \varphi'_2 u_{\beta'} + \varphi'_3 u_{\gamma'} = 0$$

ove $u_\theta = \Sigma\, \theta_i u_i$ ($\theta \equiv \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$) e le u_i sono coordinate di piani, il piano σ è birazionalmente riferito al piano σ', e corrispondentemente ad ogni sistema di valori dei parametri $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ le a), a') dànno le coordinate di due punti corrispondenti. Indicando dunque con $H_{\mu,\nu}$ il corrispondente sistema di rette si ha che le formule di rappresentazione delle sue rette sono

$$\begin{aligned}
(13)\qquad p'_{ik} \equiv {} & l_{ik} \varphi_1 \varphi'_1 + m_{ik} \varphi_2 \varphi'_2 + n_{ik} \varphi_3 \varphi'_3 + e_{ik} \varphi_1 \varphi'_2 - e'_{ik} \varphi_2 \varphi'_1 + \\
& + f_{ik} \varphi_2 \varphi'_3 - f'_{ik} \varphi_3 \varphi'_2 + g_{ik} \varphi_3 \varphi'_1 - g'_{ik} \varphi_1 \varphi'_3 \\
& (ik = 12, \ldots, 34)
\end{aligned}$$

ed il sistema lineare rappresentativo corrispondente è

$$(12')\qquad \Theta_A = 0$$

« Siccome le φ sono del grado n e si annullano al grado r'' negli elementi $\alpha''_{r''s''}$ e le φ' sono del grado n' e si annullano al grado s'' negli stessi elementi, così le (12) saranno del grado $n + n'$ e si annulleranno al grado $r'' + s''$ in $\alpha''_{r''s''}$. Le curve (12') avranno dunque a comune, ulteriormente e a due a due, altri punti in numero di

$$\begin{aligned}
& (n + n')^2 - \Sigma\alpha''_{r''s''}(r'' + s'')^2 = \\
= {} & 2(nn' - \Sigma\alpha''_{r''s''} r'' s'') + n^2 - \Sigma\alpha''_{r''s''} r''^2 + n'^2 - \Sigma\alpha''_{r''s''} s''^2 = 2(P+1)
\end{aligned}$$

per essere: $\quad n^2 - \Sigma\alpha''_{r''s''} r''^2 = n'^2 - \Sigma\alpha''_{r''s''} s'' = 1$.

« Questo numero rappresenta perciò il gradro della rigata comune ad $H_{\mu,\nu}$ e ad un complesso lineare arbitrario. Osservando, col tagliare σ, σ' per mezzo di un piano arbitrario π (*Hirst*, l. c.) che $\mu = P$, se ne cava $\nu = P + 2$, poichè 2 $(P + 1)$ è la somma dell'ordine e della classe del sistema; e ciò conduce al risultato, notissimo del resto per altra via, che una corrispondenza cremoniana di grado P fra due piani sovrapposti ha $P + 2$ punti uniti.

« 5. Avvicinando le fomule (10) alle (13), cioè, nel considerare le (10), tenendo presenti le (13), le (10) sono una rappresentazione del sistema $H_{p,p+2}$ sul sistema $K_{\mu,\nu}$. Non è difficile trovare le formule inverse; dopo un breve esame si trova, in fatti,

$$(10')\quad p'_{ik} \equiv XX'\, h_{ik} - X\,(\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'})\,(\varphi_1 a'_{ik} + \varphi_2 b'_{ik} + \varphi_3 c'_{ik}) - X'(\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi)\,(\varphi'_1 a_{ik} + \varphi'_2 b_{ik} + \varphi'_3 c_{ik}) - p_{ik} \qquad (ik = 12, \ldots, 34).$$

« 6. Due raggi corrispondenti di $H_{p,p+2}$, $K_{\mu,\nu}$ non sono in generale in un piano. Se si pone $\theta_1 p_\xi + \theta_2 q_\xi + \theta_3 r_\xi = \Phi$, $\theta_1 p_{\xi'} + \theta_2 q_{\xi'} + \theta_3 r_{\xi'} = \Phi'$ su un raggio di $K_{\mu,\nu}$ un punto ha per coordinate espressioni della forma

$$x_i \equiv \varrho \,\}\, X\,\xi_i - \Phi\,\eta_i \,\{ + \varrho' \,\}\, X'\,\xi'_i - \Phi'\,\eta'_i \,\{ \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

mentre, invece, sul corrispondente raggio di $H_{p,p+2}$ espressioni della forma

$$x_i \equiv \varrho\eta_i + \varrho'\,\eta'_i \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

in entrambi i casi $\varrho : \varrho'$ essendo un parametro variabile con un punto del raggio. Ora il piano proiettante da ξ'' il secondo raggio ha per equazione

$$(\xi''\,\eta\eta'\,x) = 0$$

ed il piano proiettante da ξ'' il primo raggio ha per equazione la (3'). Perciò sul primo piano e sul primo raggio si dovrà avere

$$\varrho : \varrho' = (\xi'\xi''\,\eta\eta')\,X' : -(\xi\xi''\,\eta\eta'')\,X$$

mentre che sul secondo piano e sul secondo raggio si avrà .

$$\varrho : \varrho' = X' : -X\,.$$

« Ne concludiamo le seguenti formule di rappresentazione piana di due classi di superficie omaloidi, la seconda delle quali venne già considerata dal Jung (1), dal sig. Visalli (2) e da me (3), cioè:

$$(14)\quad x_i \equiv (\xi'\xi''\eta\eta')\,X' \,\}\, X\xi_i - \Phi\eta_i \,\{ - (\xi\xi''\eta\eta')\,X \,\}\, X'\xi'_i - \Phi'\eta'_i \,\{ \; (i = 1, \ldots, 4)$$

$$(15)\quad x_i \equiv X'\eta_i - X\eta'_i \; (i = 1, \ldots, 4).$$

« Corrispondono ad esse i sistemi lineari di curve rappresentative di equazioni

$$(16)\quad (\xi'\xi''\,\eta\eta')\,X' \,\}\, Xa_\xi - \Phi a_\eta \,\{ - (\xi\xi''\,\eta\eta')\,X \,\}\, X'a_{\xi'} - \Phi' a_{\eta'} \,\{ = 0$$

$$(17)\quad X'a_\eta - Xa_{\eta'} = 0$$

ove $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ sono parametri variabili colle curve del sistema.

« Facendo intervenire le (13), e ponendo $(\xi'\xi'')_{lm} = k'_{lm}$, $(\xi\xi'')_{lm} = k_{lm}$ $(lm = 12, \ldots, 34)$ le (16) possono pure essere scritte nella forma

$$(18)\quad XX'\,(a_\xi\, p'_{k'} - a_{\xi'}\, p'_k) + X\,\Phi' a_{\eta'}\, p'_k - X'\,\Phi a_\eta\, p'_{k'} = 0$$

(1) *Sulle superficie generate* ecc. Rend. Acc. Lincei, an. 1886.

(2) Rend. Acc. Lincei, settembre 1886.

(3) *Sulla superficie del 5° ordine dotata di curva doppia del 5° ordine*. Rend. Acc. Lincei, vol. VI, an. 1890, nota in pie' della pagina 223. Infatti, salvo le notazioni, le equazioni (15) sono precisamente quelle date in quella nota.

§ III.

Due altre classi di superficie omaloidi. Si mette in evidenza qualche caso speciale.

« 7. Se, indicando con $\vartheta_i, \varepsilon_i$ $(i = 1, \dots, 6)$ due sestuple qualunque di quantità, noi poniamo:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} r_{i,i+1} & r_{24} & r_{34} \\ \vartheta_i & \vartheta_5 & \vartheta_6 \\ \varepsilon_i & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \end{vmatrix} = \mathrm{R}_i \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3;\ i + 1 \equiv 1 \text{ per } i = 3 \text{ ed} \\ \mathrm{R} \equiv \mathrm{H}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \dots, \mathrm{F}', \mathrm{N} \text{ quando } r \equiv h, a, b, \dots, f', n \end{pmatrix}$$

e poi nelle formule (22) del nostro lavoro citato « *Sopra un sistema di rette* (3, 4) » poniamo, al posto delle p_{ik} una volta le espressioni (10) ed un'altra le (13), noi otteniamo le formule di rappresentazione piana di una doppia classe di superficie omaloidi che, con linguaggio della geometria a più variabili, possono essere chiamate *proiezioni*, sul nostro spazio, dei sistemi di rette considerati nei paragrafi precedenti. Indicando con z_i le coordinate di un punto di una superficie della 1ª classe, e con z'_i quelle di un punto della corrispondente superficie nella seconda classe, in grazia delle (19) e delle supposizioni fatte, noi abbiamo:

$$(20) \quad \begin{aligned} z_i \equiv \mathrm{X}\mathrm{X}'\mathrm{H}_i &- \mathrm{X}\Phi'(\varphi'_1 \mathrm{A}_i + \varphi'_2 \mathrm{B}_i + \varphi'_3 \mathrm{C}_i) \\ &- \mathrm{X}'\Phi(\varphi_1 \mathrm{A}'_i + \varphi_2 \mathrm{B}'_i + \varphi_3 \mathrm{C}'_i) + \Phi\Phi' z'_i \quad (i=1,\dots,4) \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} z'_i \equiv \mathrm{L}_i \varphi_1\varphi'_1 + \mathrm{M}_i \varphi_2\varphi'_2 + \mathrm{N}_i \varphi_3\varphi'_3 + \mathrm{E}_i \varphi_1\varphi'_2 - \mathrm{E}'_i \varphi_2\varphi'_1 &+ \\ + \mathrm{F}_i \varphi_2\varphi'_3 - \mathrm{F}'_i \varphi_3\varphi'_2 + \mathrm{G}_i \varphi_3\varphi_1' - \mathrm{G}'_i \varphi_1\varphi'_3 & \quad (i=1,\dots,4) \end{aligned}$$

ed i sistemi lineari rappresentativi corrispondenti sono:

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathrm{X}\mathrm{X}' u_{\mathrm{H}} - \mathrm{X}\Phi'(\varphi'_1 u_{\mathrm{A}} + \varphi'_2 u_{\mathrm{B}} + \varphi'_3 u_{\mathrm{C}}) - \mathrm{X}'\Phi(\varphi_1 u_{\mathrm{A}'} + \varphi_2 u_{\mathrm{B}'} + \varphi_3 u_{\mathrm{C}'}) &+ \\ + \Phi\Phi' u_{z'} &= 0 \end{aligned}$$

$$(23) \quad \begin{aligned} u_{z'} = u_{\mathrm{L}}\varphi_1\varphi'_1 + u_{\mathrm{M}}\varphi_2\varphi'_2 + u_{\mathrm{N}}\varphi_3\varphi'_3 + u_{\mathrm{E}}\varphi_1\varphi'_2 - u_{\mathrm{E}'}\varphi_2\varphi'_1 &+ \\ + u_{\mathrm{F}}\varphi_2\varphi'_3 - u_{\mathrm{F}'}\varphi_3\varphi'_2 + u_{\mathrm{G}}\varphi_3\varphi'_1 - u_{\mathrm{G}'}\varphi_1\varphi'_3 &= 0 \end{aligned}$$

essendo $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ le coordinate del piano di una sezione.

« La forma delle (22) e (23) mostra chiaramente che i sistemi di curve da esse rappresentati sono ordinatamente contenuti nei sistemi (11) e (12'); e che perciò, finchè le $\vartheta_i, \varepsilon_i$ sono assolutamente arbitrarie, le (20) rappresentano una superficie dell'ordine $\mu + \nu$, e le (21) una superficie dell'ordine $2(\mathrm{P} + 1)$. Ma se le ϑ_i sono i valori che prendono le p_{ik}, o le p'_{ik}, date dalle (10), o dalle (13), per un sistema di valori dei parametri $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, allora le (20) rappresenteranno una superficie dell'ordine $\mu + \nu - 1$, o dell'ordine $2\,\mathrm{P} + 1$. Infatti, in una forma più concisa, le (20) e (21) possono essere scritte così:

$$\begin{vmatrix} u_z & u_\varepsilon & u_p \\ \vartheta_5 & \varepsilon_5 & p_{24} \\ \vartheta_6 & \varepsilon_6 & p_{34} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} u_z & u_\varepsilon & u_{p'} \\ \vartheta_5 & \varepsilon_5 & p'_{24} \\ \vartheta_3 & \varepsilon_6 & p'_{34} \end{vmatrix} = 0$$

« Ne segue che pel suddetto sistema di valori di $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$ questi due determinanti acquistano due colonne identiche; epperò le curve da essi rappresentate hanno un ulteriore punto comune.

« Se anche le ε_i sono scelte come le ϑ_i corrispondentemente ad un altro sistema di valori dei parametri $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$; allora nei sistemi (20) e (21) interviene un nuovo punto fondamentale, e le superficie rappresentate saranno rispettivamente dell'ordine $\mu+\nu-2$, 2 P.

« Il numero $\mu+\nu$ si può esprimere in funzione dei numeri M, M′. Infatti applicando il modo tenuto da me nel § III dell'art. *Su certi luoghi che s'incontrano* ecc. (1) si trova $\mu = \mathrm{MM}'+\mathrm{M}+\mathrm{M}'$ e $\nu=\mu+1$ (2). Le superficie rappresentate dalle (20) saranno dunque dell'ordine $2\mu+1$, dell'ordine 2μ, o dell'ordine $2\mu-1$.

« 8. Per fare un esempio semplice di quanto si è esposto, e che nello stesso tempo serva di aggiunta a delle nostre ricerche anteriori sugli enti che ora incontriamo, supponiamo le a), a'), 3′) nella forma

$$a_1)\quad \eta_i \equiv \lambda\alpha_i+\mu\beta_i+\nu\gamma_i\quad,\quad a'_1)\quad \eta'_i\equiv\mu\nu\alpha'_i+\nu\lambda\beta'_i+\lambda\mu\gamma'_i$$

$$3_1)\quad \lambda p_x+\mu q_x+\nu r_x=0\qquad (i=1\,,\dots,4)$$

cioè supponiamo le stelle (ξ), (ξ'') riferite linearmente fra loro e reciprocamente, e riferite quadraticamente alla (ξ'). Allora noi abbiamo nelle (20) le formule di rappresentazione piana di una superficie d'ordine 11, o 10, o 9 a seconda della scelta delle ϑ_i, ε_i, e nelle (21), che nel caso attuale diventano:

$$z'_i\equiv(\mathrm{L}_i+\mathrm{M}_i+\mathrm{N}_i)\lambda\mu\nu+\mathrm{E}_i\lambda^2\nu-\mathrm{E}'_i\mu^2\nu+\mathrm{F}_i\mu^2\lambda-\mathrm{F}'_i\nu^2\lambda+\mathrm{G}_i\nu^2\mu-\mathrm{G}'_i\lambda\mu$$
$$(i=1\,,\dots,4)$$

quelle di una superficie del 6° ordine con 6 rette ed una curva doppia del 9° ordine (3) o quelle di una superficie del 5° ordine con 10 rette ed una curva doppia del 5° ordine (4), o quelle di una superficie del 4° ordine a conica doppia (5).

« 9. Anche le (17) ci dànno, con una particolare circostanza, una su-

(1) Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. I, an. 1887.

(2) Cfr. anche l'art. del sig. Loria. *Sugli enti geometrici generati da forme fond.* ecc. nel Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova, an. 1887.

(3) Cfr. Caporali, Mem. di Geom., pag. 202, caso 2°. Non sarà senza interesse fare il raffronto colle superficie del 6° ordine che abbiamo incontrato nel n. 10 del nostro citato lavoro: *Sopra un sistema di rette* (3, 4), e coll'altra, pure del 6° ordine, che equivale ad una proiezione della congruenza del 3° grado, menzionata nello stesso lavoro. Queste due ultime superficie del 6° ordine si trovano pure menzionate dal Caporali nei casi 4° e 3° rispettivamente del loc. cit.

(4) Questa superficie è anche data dalle (15) e dal corrispondente sistema lineare (17) se, avendo preso per a), 3′) le a_1), $3'_1$) si prendono poi per a') le $\eta'_i=\lambda\alpha'_i+\mu\beta'_i+\nu\gamma'_i$ $(i=1\,,\dots,4)$. (Cfr. i miei precedenti lavori sull'argomento).

(5) Osservazione analoga alla precedente, purchè, p. e., si abbia $\alpha\equiv\alpha'$.

perficie che abbiamo già incontrata trattando del sistema (3, 4) nel lavoro dianzi citato.

« Infatti, nel caso attuale, si ha:

$$X = p_\alpha . \lambda^2 + q_\beta . \mu^2 + r_\gamma . \nu^2 + (p_\beta + q_\alpha)\lambda\mu + (q_\gamma + r_\beta)\mu\nu + (r_\alpha + p_\gamma)\nu\lambda$$
$$X' = (p_\alpha + q_\beta + r_\gamma)\lambda\mu\nu + q_\alpha . \mu^2\nu + q_\gamma . \quad \nu + r_\beta . \nu^2\lambda + r_\alpha . \nu^2\mu + p_\gamma . \lambda^2\mu + p_\beta . \lambda^2\nu$$
$$a_\eta = \lambda a_\alpha + \mu a_\beta + \nu a_\gamma \quad , \quad a_{\eta'} = \mu\nu . a_{\alpha'} + \nu\lambda . a_{\beta'} + \lambda\mu . a_\gamma ,$$

cosicchè le (17) sono ora curve del 4° ordine con 9 punti comuni; dei quali 6 sono i punti $X = 0 \quad , \quad X' = 0$
e 3 i vertici del triangolo di riferimento nel piano rappresentativo. La superficie rappresentata è dunque del 7° ordine (¹), possiede 9 rette, una conica φ ed una cubica piana ψ senza punti comuni. La conica φ è l'immagine della $X = 0$ che contiene 6 dei punti fondamentali, e la cubica è l'immagine della $X' = 0$ che li contiene tutti e 9. La conica ha per equazioni (ved. n. 6 equ. 15)

$$x_i \equiv \lambda\alpha_i + \mu\beta_i + \nu\gamma_i \quad (i = 1 , \ldots , 4)$$

quando per λ , μ , ν si siano sostituite quelle funzioni, quadratiche, di un parametro, che annullano X; e la cubica ha per equazioni

$$x_i \equiv \mu\nu\alpha'_i + \nu\lambda\beta'_i + \lambda\mu\gamma'_i \; (i = 1 , \ldots , 4)$$

quando per λ , μ , ν si siano poste quelle funzioni (ellittiche) di un parametro che annullano X'. Riferendosi ora al piano rappresentativo, ed utilizzando le (15), si possono trovare molte altre proprietà della superficie (²), alcune delle quali sono evidenti; ma non è mica nostra intenzione fermarci su esse. Ci basta, coi pochi esempii che abbiamo dati, l'aver mostrata l'utilità che si può cavare dalle formule generali stabilite innanzi: ed il gran numero di enti che per mezzo di esse possono venire studiati con abbastanza semplicità ed eleganza.

« 10. È probabile che in altro lavoro noi torneremo sull'argomento che forma oggetto del presente scritto ».

Matematica. — *Curve aggiunte minime*. Nota di Federico Amodeo, presentata a nome del Socio Cremona.

« Nella classica Memoria dei sigg. Brill e Nöther (*Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann., VII) allorquando si parla delle relazioni che esistono fra il genere della curva

(¹) Questo fatto si può dedurre dalla genesi stessa della superficie applicando il principio di corrispondenza su una retta; ma si possono confrontare in proposito le Note citate del Jung e del sig. Visalli.

(²) Per es. si trova che le 9 rette della superficie incontrano tutta la cubica piana ψ e 6 soltanto incontrano la conica φ; che vi sono 15 altre coniche appoggiate ciascuna in un punto a ψ ed in nessun punto a φ, 18 altre appoggiate ciascuna in un punto a φ ed in un punto a ψ, e 3 altre appoggiate soltanto in due punti a φ ecc.