ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo.* Nota del Corrispondente VITO VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine m—3—α.* Nota di FEDERICO AMODEO, presentata dal Socio CREMONA.

« In una Nota precedente (1) ho fatto vedere la utilità della considerazione delle curve di ordine inferiore a $m-3$, aggiunte ad una curva piana C^m_p di ordine m e di genere p. In questa mi propongo di mostrare la forma che prendono in riguardo a queste curve agg. i teoremi di *Riduzione* del sig. Nöther quello di *Reciprocità* dei sigg. Brill e Nöther e quello di Riemann e Roch noti intorno alle curve agg. di ordine $m-3$. È specialmente interessante vedere come il teorema di Riemann e Roch esteso a queste curve agg. di ordine $m-3-\alpha$ ripigli in generale la forma di diseguaglianza data primitivamente da Riemann, e che solo in due casi particolari esso conservi la forma di eguaglianza data poi da Roch.

§ 1.

« Per la serie g_N^R determinata da tutte le $C^{m-3-\alpha}$ agg. alla curva C^m_p abbiamo trovato essere

$$\mathrm{N}-\mathrm{R}=p-1-\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\varrho$$

per ogni altra serie g_n^r completa determinata da un sistema di curve $C^{m-3-\alpha}$ agg. sarà evidentemente

$$n-r \leq p-1-\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\varrho$$

ovvero

$$n-r < p-\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\varrho$$

poichè per ogni unità che perde la dimensione della serie, l'ordine deve diminuire di una o più unità; questa relazione vale anche se la serie g_n^r completa ha punti fissi, purchè si contino nel numero n questi punti fissi. Pos-

(1) Cfr. *Curve aggiunte minime* di questi Rendiconti. Per le notazioni qui usate mi riferisco alla nota citata.

siamo dunque affermare che: *per ogni serie completa segata da curve aggiunte di ordine* $m-3-a$ *deve essere*

$$n-r \leq p-1-\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}-\varrho \ .$$

« Non avviene così se la serie è parziale; nè è vera la reciproca di questa proposizione (²).

§ 2.

« Sia g_n^r una serie lineare completa segata da un sistema delle $C^{m-3-\alpha}$ agg. (α positivo o nullo), e sia $g_{n'}^{r'}$ la sua serie lineare residua rispetto alla *serie canonica* g_N^R, dovrà essere $n \leq N$, $r \leq R$. Sia inoltre G_n un gruppo della g_n^r (esso sta almeno sopra una curva aggiunta di ordine $m-3-\alpha$) e sia P un punto pel quale non passino tutte le $C^{m-3-\alpha}$ che passano per G_n, cioè che non sia punto fisso della serie residua $g_{n'}^{r'}$, vogliamo cercare ladimensione della serie determinata dal gruppo G_n P. Pel gruppo G_n P conduciamo una curva agg. di ordine $m-2-\alpha$ composta di una retta l che passi per P e di una curva agg. di ord. $m-3-\alpha$ del gruppo G_n che non passi per P. La curva $C^{m-3-\alpha}$ segherà la curva C_p^m ancora in $N-n$ punti che costituiscono un gruppo Γ che non contiene P, e la retta l segherà la C_p^m in altri $m-1$ punti che costituiscono un gruppo Π. Il gruppo $\Gamma\Pi$ è un gruppo residuo di G_n P, e quindi la serie determinata da G_n P è segata dalle curve $C^{m-2-\alpha}$ agg. che passano per $\Gamma\Pi$: queste contenendo della C_p^m $m-1$ punti per diritto si debbono spezzare nella retta l che passa per P ed in una curva di ord. $m-3-\alpha$ che passa per Γ; ma queste segano appunto la g_n^r che è determinata dal gruppo G_n, dunque la serie che è determinata dal gruppo G_n P ha per punto fisso il punto P e quindi è una g^r_{n+1} completa.

« E quindi possiamo enunciare il teorema:

« *Ogni gruppo* G_n *di una* g_n^r *completa segata da un sistema di curve agg.* $C^{m-3-\alpha}$, *insieme ad un qualunque punto* P *della curva* C_p^m *che non appartenga a tutte le curve* $C^{m-3-\alpha}$ *che passano per* G_n *determina una serie lineare completa che ha per punto fisso il punto* P, *cioè è composta della* g_n^r *determinata da* G *e del punto fisso* P.

« A questo teorema corrisponde per le curve agg. di ord. $m-3$ il teorema di riduzione di Nöther, e ne conserva identica la forma.

« Sicchè se avessimo una serie completa speciale segata da un sistema di curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, e questa con un punto fisso P costituisse una serie

(²) Nel caso particolare di $\alpha=0$ si ha il noto teorema: *Se una serie è staccata da curve aggiunte di ordine* $m-3$ *deve essere* $n-r<p$; del quale è noto essere vero l'inverso: *Se una serie è completa ed è* $n-r<p$, *essa è segata da un sistema di curve aggiunte dell'ordine* $m-3$. Mostrerò nel § 5 la forma che prende quest'ultimo teorema.

parziale, cioè contenuta in un'altra di dimensione maggiore, bisognerebbe conchiudere che il punto P è un punto speciale della curva C_p^m, pel quale passano tutte le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ che passano per G_n, e quindi per ciascun gruppo della g_n^r; perchè se una sola $C^{m-3-\alpha}$ non ci passasse la serie $g_n^r + P$ sarebbe completa.

§ 3.

« Questi due teoremi precedenti ci conducono direttamente al teorema di Riemann e Roch esteso alle curve agg. di ord. $m - 3 - \alpha$.

« Si abbia un gruppo G_n di una g_n^r segata da curve $C^{m-3-\alpha}$ agg., e supponiamo che per esso passino r' curve $C^{m-3-\alpha}$. Se al gruppo G_n aggiungiamo un punto fisso P_1, che non stia su tutte le $C^{m-3-\alpha}$ di G_n, la serie completa determinata dal gruppo $G_n P_1$ avrà quel punto P_1 per punto fisso e sarà di dimensione r; e se $r' > 0$ per $G_n P_1$ passeranno $\infty^{r'-1}$ curve $C^{m-3-\alpha}$. Aggiungendo al gruppo $G_n P_1$ un altro punto P_2 pel quale non passino tutte le curve $C^{m-3-\alpha}$ che passano per $G_n P_1$, la serie completa determinata da $G_n P_1 P_2$ sarà di dimensione r coi punti fissi $P_1 P_2$, cioè sarà una g^r_{n+2}. Così seguitando ad aggiungere con la stessa condizione i punti $P_3, P_4 \ldots P_{r'}$, per il gruppo $G_n P_1 P_2 \ldots P_{r'}$ passerà una sola $C^{m-3-\alpha}$ e questo gruppo determina una serie completa $g^r_{n+r'}$, di dimensione r e di ordine $n + r'$.

« Scegliendo ancora un punto fisso $P_{r'+1}$ fuori di questi punti, pel gruppo $G_n P_1 P_2 \ldots P_{r'} P_{r'+1}$ non passerà alcuna $C^{m-3-\alpha}$, dunque per la $g^r_{n+r'}$, deve aversi

$$n + r' - r \leq p - 1 - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \varrho$$

ovvero

$$r' \leq (p-1) - (n-r) - \left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho\right],$$

$$r \geq (n + r') - (p-1) + \left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho\right]$$

« Quindi si può enunciare il teorema di Riemann e Roch esteso alle curve $C^{m-3-\alpha}$ nelle due seguenti forme:

« *Se g_n^r è una serie completa segata da curve $C^{m-3-\alpha}$, per ogni suo gruppo passeranno non più di $\infty^{(p-1)-(n-r)-\left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\varrho\right]}$ curve aggiunte di ord. $m - 3 - \alpha$.*

« *Se per un gruppo G_n di una C_p^m passano $\infty^{r'}$ curve agg. di ord. $m - 3 - \alpha$, esso appartiene ad una serie completa la cui dimensione non può essere minore di*

$$(n + r') - (p-1) + \left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho\right].$$

Vogliamo ora indagare se e quando in questo teorema può aver luogo il segno eguale.

« Se g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ sono due serie residue rispetto alla g_N^R segata da tutte le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, si deve avere contemporaneamente

$$r \geq (n+r') - (p-1) + \left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho\right]$$

$$r' \geq (n'+r) - (p-1) + \left[\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho\right].$$

Sommando, e tenendo conto che $n+n' = 2p-2-m\alpha$, si trova che deve essere

$$\varrho \leq \frac{\alpha}{2}(m-\alpha-3)$$

e questa relazione è perfettamente verificata; dunque:

« *Il segno eguale nel teorema precedente ha luogo solamente quando ϱ è massimo.*

« *In particolare, per le curve agg. di ord. $m-3$ ha luogo sempre il segno eguale.*

§ 4.

« Limitiamoci in questo § al caso in cui ϱ abbia il massimo valore. Essendo g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ due serie residue si hanno le relazioni

$$r = (n+r') - (p-1) + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \varrho$$

$$r' = (p-1) + (n-r) - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \varrho$$

$$n+n' = 2p-2-m\alpha.$$

Aggiungendo alla differenza delle prime due relazioni la terza si ha

$$2(r-r') = n-n'.$$

« Dunque:

« *Nel caso in cui, fra le condizioni lineari imposte alle curve $C^{m-3-\alpha}$ dai passaggi per i punti multipli di C_p^m, il numero di quelli che dipendono linearmente dai rimanenti è massimo, si ha fra gli ordini e le dimensioni delle serie residue rispetto alla serie canonica determinata dalle curve $C^{m-3-\alpha}$ la stessa relazione che esiste fra gli ordini e le dimensioni delle serie residue rispetto alla serie canonica segata dalle curve aggiunte di ordine $m-3$.*

§ 5.

« Venendo ora al reciproco del teorema del § 1 dimostreremo che:

« *Allorquando $n-r \leq R$ la serie g_n^r esistente su C_p^m è segata certamente da un sistema di curve agg. di ordine $m-3-\alpha$.*

« È evidente che il teorema è vero se la serie ha la dimensione zero, poichè in tal caso il numero dei punti dell'unico gruppo che la sostituisce è minore o eguale a quello che basta a individuare ogni $C^{m-3-\alpha}$.

« Ora supponiamo che il teorema sia vero per ogni g_n^r già esistente sulla C_p^m, dico che esso sarà vero per una g_{n+1}^{r+1} esistente in questa. Infatti assumiamo nella g_{n+1}^{r+1} un gruppo di cui un punto P non sia fisso per la serie e indichiamo il gruppo dei rimanenti punti con G_n. Tutti i gruppi g_{n+1}^{r+1} che contengono il punto P formano una $g^r{}_{n+1}$ parziale col punto fisso P: astraendo da P formano una $g^r{}_n$ che contiene G_n. Per ipotesi per ogni gruppo della g_n^r passa una $C^{m-3-\alpha}$; e se una di queste non contenesse il punto fisso P, la serie determinata dal gruppo G_nP, considerata col punto fisso P, sarebbe completa, e ciò non è; dunque tutte le $C^{m-3-\alpha}$ che passano per G_n passano per P, e quindi per ogni gruppo della g_{n+1}^{r+1} passa una curva $C^{m-3-\alpha}$.

« Il teorema essendo vero per ogni $g^0{}_{n-r}$, è vero per una $g^1{}_{n+1-r}$, per una $g^2{}_{n+2-r}$, ecc., e quindi è vero pure per la g_n^r.

« Possiamo enunciare questo teorema anche sotto la seguente forma:

« *Sopra una curva* C_p^m *piana che sia proiezione di una curva* $C_p^{m\alpha}$ *di un* $S_{\rho+\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}}$, *ogni* g_n^r *per la quale si abbia*

$$r > n - p + \left[m\alpha - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} \right] - \varrho$$

si può staccare mediante un sistema di curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$ ».

Matematica. — *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

« 1. In una precedente Nota ho stabilito che ogni gruppo continuo di trasformazioni cremoniane del piano (dipendente da un numero finito di parametri), può esser birazionalmente trasformato in un altro appartenente ad uno dei seguenti gruppi:

1°) gruppo ∞^8 delle omografie;

2°) gruppo ∞^6 delle trasformazioni quadratiche che mutano in sè due fasci di raggi (o gruppo delle inversioni rispetto ai circoli);

3°) gruppo ∞^{n+5} (con n intero arbitrario) delle trasformazioni di Jonquières (d'ordine n) che mutano in sè il sistema lineare ∞^{n+1} delle curve d'ordine n con un punto base $(n-1)$plo e le $n-1$ tangenti fisse.

« Il 1° ed il 2° gruppo sono stati più volte studiati. Il sig. Lie (1) ha dimostrato che il gruppo delle omografie in S_n (in particolare il nostro gruppo 1°)

(1) *Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. I, S. 560 (Math. Ann. 25).