# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME II.**

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

*Seduta del 17 giugno 1893.*

F. Brioschi Presidente.

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Anatomia.** — *Sulla struttura della retina degli occhi delle salpe.* Nota del Socio Todaro.

Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo.* Nota del Corrispondente Vito Volterra.

« 1. In una Nota comunicata nella precedente seduta, ho considerato le equazioni differenziali delle vibrazioni di un corpo elastico isotropo, allorchè le componenti degli spostamenti sono indipendenti da una delle coordinate cartesiane che abbiamo chiamata $z$.

« Allorchè si teneva conto soltanto degli spostamenti normali all'asse $z$, l'equazioni differenziali stesse si scrivevano sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \varpi}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - a^2 \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \tag{2}$$

essendo

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varpi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

« Nella Nota suddetta ho stabilito delle formule le quali danno i valori di $u$ e $v$ al vertice comune di due *coni caratteristici*, mediante i valori degli spostamenti stessi e delle loro derivate lungo una superficie qualunque inclusa entro i due coni e che limita insieme a ciascuno di essi una regione adiacente al vertice.

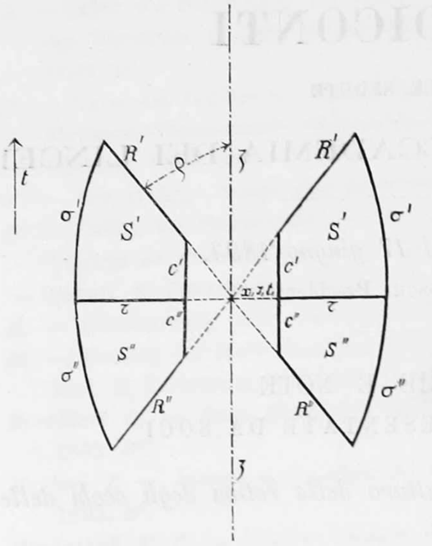


Fig. 1.

« Mi propongo ora di ottenere delle formule analoghe, allorchè la superficie lungo la quale sono dati i valori di $u$ e $v$ e delle loro derivate giace esternamente ai detti coni.

« 2. Nel campo delle tre variabili $x$, $y$, $t$, conduciamo un cono R di rotazione il cui asse $\zeta$ sia parallelo a $t$, avente il vertice nel punto $x_1$, $y_1$, $t_1$ e la cui apertura sia $2\varrho$ essendo $\operatorname{tg}\varrho > a$. Quindi mediante una superficie $\sigma$ si limiti una porzione di spazio esterna al cono adiacente al vertice, e finalmente si conduca un cilindro $c$ di rotazione di raggio $\varepsilon$ avente per asse $\zeta$. (Fig. I) (1).

« Esaminiamo lo spazio S racchiuso entro le tre superficie $\sigma$, R, $c$; in esso gl'integrali (I) della Nota precedente avranno valori immaginari. Onde ridurli reali moltiplichiamoli per $i$; otterremo in tal modo le funzioni

$$
(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} u_1 = \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\dfrac{y - y_1}{r^2} = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\operatorname{sen}\omega \\[2ex] v_1 = -\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\dfrac{x - x_1}{r^2} = -\dfrac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\cos\omega \end{cases}
$$

che costituiranno un sistema di integrali delle (1) e (2) e i quali entro lo spazio S si conserveranno reali e regolari. Perciò potremo applicare la formula (7) della Nota citata, avvertendo di mutare il segno alle espressioni che compariscono entro i radicali, e nel medesimo tempo di cambiare il segno al secondo membro. Avremo allora

$$
(3)\quad \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\Big\{\mathrm{U}\operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega\Big\}d\Sigma =
$$

$$
\int_{\Sigma} \frac{a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}\Big\{\Big[(t_1 - t)\cos nt\operatorname{sen}\omega - r\cos ny\Big]u -
$$

$$
-\Big[(t_1 - t)\cos nt\cos\omega - r\cos nx\Big]v\Big\}d\Sigma
$$

(1) In questa figura, come pure nella successiva ciascun elemento S, $\sigma$, R, $c$ .... è formato dall'insieme di quelli rappresentati colla stessa lettera aventi uno e due apici.

in cui per semplicità si è posto

$$
(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta \cos nx - a^2\,\varpi \cos ny \\ \mathrm{V} &= \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta \cos ny + a^2\,\varpi \cos nx. \end{aligned} \right.
$$

« Le osservazioni che abbiamo fatto nella Nota precedente dimostrano che la parte dell' integrale che comparisce nel secondo membro la quale è estesa al cono R è nulla; e facendo diminuire l'angolo $\varrho$ finchè si riduca $\operatorname{tg}\varrho = a$, avremo che al limite sparirà nel primo membro la parte dell' integrale pure estesa al cono R. Osserviamo poi che sul cilindro $c$ si ha $\cos nt = 0$, $\cos nx = \cos\omega$, $\cos ny = \operatorname{sen}\omega$, $dc = \varepsilon d\omega\, dt$, per conseguenza allorchè $\operatorname{tg}\varrho = a$, la equazione (3) diventerà

$$
\int_\sigma \Bigg[ \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r} \left\{ \mathrm{U} \operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega \right\} -
$$

$$
- \frac{a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2(t_1-t)^2}} \left\{ \Big[ (t_1 - t)\cos nt \operatorname{sen}\omega - r\cos ny \Big] u - \right.
$$

$$
\left. - \Big[ (t_1 - t)\cos nt \cos\omega - r \cos nx \Big] v \right\} \Bigg] d\sigma
$$

$$
= \int_c \Bigg[ \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1-t)^2}}{r} \left\{ \mathrm{U}\operatorname{sen}\omega - \mathrm{V}\cos\omega \right\} +
$$

$$
+ \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2(t_1-t)^2}} (u \operatorname{sen}\omega - v\cos\omega) \Bigg] dc =
$$

$$
= -a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \frac{\varepsilon}{a}}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{a}} \sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1-t)^2}\, \varpi\, dt +
$$

$$
+ a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \frac{\varepsilon}{a}}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{a}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1-t)^2}} (u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\, dt.
$$

« Quindi facendo tendere $\varepsilon$ verso zero, l'ultimo membro va a zero.

« Si può dunque concludere:

« Essendo $s_a$ una superficie che limita una porzione di spazio esterna al cono A (considerato nella precedente Nota) ed adiacente al vertice, abbiamo. (Vedi Fig. 2)

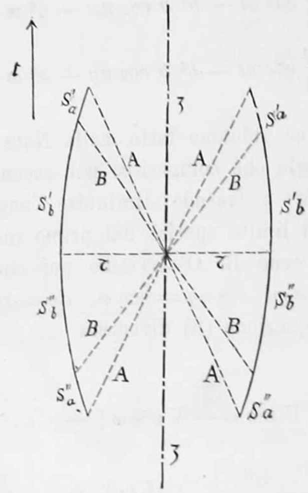


FIG. 2.

$$\text{(III)}\qquad \int_{s_a}\Bigg[\frac{\sqrt{r^2-a^2(t_1-t)^2}}{r^2}\Big\{\mathrm{U}(y-y_1)-\mathrm{V}(x-x_1)\Big\}-$$

$$-\frac{a^2}{r^2\sqrt{r^2-a^2(t_1-t)^2}}\Big\{\Big[(t_1-t)(y-y_1)\cos nt-r^2\cos ny\Big]u-$$

$$-\Big[(t_1-t)(x-x_1)\cos nt-r^2\cos nx\Big]v\Big\}\Bigg]ds_a=0.$$

« Analogamente partendo dagli integrali

$$\text{(IV)}\qquad \left\{\begin{aligned} u_1&=\frac{\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}{r^2}(x-x_1)=\frac{\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}{r}\cos\omega\\ v_1&=\frac{\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}{r^2}(y-y_1)=\frac{\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}{r}\operatorname{sen}\omega\end{aligned}\right.$$

delle equazioni (1) e (2) si giungerebbe al seguente resultato:

« Se $s_b$ è la porzione di $s_a$ esterna al cono B (considerato nella Nota precedente) si avrà:

$$\text{(III')}\qquad \int_{s_b}\Bigg[\frac{\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}{r^2}\Big\{\mathrm{U}(x-x_1)+\mathrm{V}(y-y_1)\Big\}-$$

$$-\frac{b^2}{r^2\sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}}\Big\{\Big[(t_1-t)(x-x_1)\cos nt-r^2\cos nx\Big]u+$$

$$+\Big[(t_1-t)(y-y_1)\cos nt-r^2\cos ny\Big]v\Big\}\Bigg]ds_b=0\,.$$

« Le due formule (III) e (III') che abbiamo trovato stabiliscono delle relazioni a cui debbono soddisfare le funzioni $u, v$ e le loro derivate lungo le superficie $s_a, s_b$, e sono le analoghe della equazione (23) della Nota *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi* (1).

« 3. Passiamo ora a stabilire le formule risolutive della questione propostaci.

« Si ponga

$$\xi = \sqrt{1-\theta^2}\,(\log(1-\theta^2) - 1 + \log r) + \theta \text{ arco sen } \theta =$$

$$= \sqrt{1-\theta^2} \log\left(\frac{1-\theta^2}{e}\, r\right) + \theta \text{ arco sen } \theta\,,$$

in cui per arco sen $\theta$ si prende un valore compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

« È facile verificare che, essendo $c$ una costante arbitraria,

$$(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= (\xi + c\theta)\frac{y-y_1}{r} = (\xi + c\theta) \operatorname{sen} \omega\,, \\ v_1 &= -(\xi + c\theta)\frac{x-x_1}{r} = -(\xi + c\theta) \cos \omega\,, \end{aligned} \right. \qquad \theta = \frac{a(t-t_1)}{r}$$

$$(\mathrm{VI}) \quad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= (\xi + c\theta)\frac{x-x_1}{r} = (\xi + c\theta) \cos \omega\,, \\ v_1 &= (\xi + c\theta)\frac{y-y_1}{r} = (\xi + c\theta) \operatorname{sen} \omega\,, \end{aligned} \right. \qquad \theta = \frac{b(t-t_1)}{r}$$

formano due sistemi di integrali delle equazioni (1) e (2). Il primo di essi si conserva reale finchè ci manteniamo nello spazio esterno al cono A, ed il secondo finchè siamo esternamente a B.

« Ciò premesso prendiamo a considerare il campo S rappresentato nella fig. 1, e conduciamo il piano $\tau$ avente per equazione $t = t_1$. Esso dividerà lo spazio S in due parti in una delle quali (che denoteremo con S') i punti hanno una coordinata $t$ maggiore di $t_1$, mentre nell'altra (che indicheremo con S'') la coordinata $t$ dei punti è inferiore a $t_1$.

« Le parti di $\sigma$, R, $c$ che appartengono al contorno di S' le distingueremo ponendo un apice alle lettere stesse; mentre porremo due apici per indicare le parti delle stesse superficie che limitano S''.

« 4. Riprendiamo ora la formola (5) della precedente Nota ed applichiamola al campo S' prendendo per funzioni $u_1$ e $v_1$ le (V).

(1) V. Rendiconti. Vol. I, 2° sem, serie 5a, fasc. 8.

« Cominciamo dal calcolare i valori di $\vartheta_1$, $\varpi_1$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}$, $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ corrispondenti. Avremo

$$\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1 &= 0\\
\varpi_1 &= \frac{1}{r\sqrt{1-\theta^2}}\left(\log(1-\theta^2)+\log r\right)\\
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \left[-\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\left(\log(1-\theta^2)+\log r\right)+\text{arco sen}\,\theta+c\right]\frac{a}{r}\frac{y-y_1}{r}\\
\frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\left[-\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\left(\log(1-\theta^2)+\log r\right)+\text{arco sen}\,\theta+c\right]\frac{a}{r}\frac{x-x_1}{r}.
\end{aligned}\right.$$

« Perciò la (5) della Nota precedente in questo caso diventerà

$$\int_\Sigma \Pi d\Sigma = 0 \tag{4}$$

quando si prenda

$$\begin{aligned}
\Pi = (\xi + c\theta)\left\{\mathrm{U}\,\text{sen}\,\omega - \mathrm{V}\cos\omega\right\} -\\
-\frac{\left(\log(1-\theta^2)+\log r\right)a}{r\sqrt{1-\theta^2}}\left\{u\left[-\theta\,\text{sen}\,\omega\cos nt - a\cos ny\right]+\right.\\
\left.+v\left[\theta\cos\omega\cos nt + a\cos nx\right]\right\}-\\
-\frac{a}{r}(\text{arco sen}\,\theta+c)\left\{u\,\text{sen}\,\omega - v\cos\omega\right\}\cos nt.
\end{aligned}$$

« Il contorno $\Sigma$ è formato da $\sigma'$, dalle parti di R′ e di $\tau$ esterne al cilindro $c'$, e finalmente da quest'ultimo cilindro $c'$.

« Sulla falda R′ del cono R abbiamo

$$\theta = \frac{a}{\text{tg}\,\varrho}\,,\quad \cos nt = -\,\text{sen}\,\varrho\,,$$

quindi il valore di $\Pi$ nei punti del cono R′ risulta il seguente

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathrm{R}'} = \left\{\sqrt{1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\varrho}}\left(\log\left(1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\varrho}\right)-1+\log r\right)+\right.\\
\left.+\frac{a}{\text{tg}\,\varrho}\left(\text{arco sen}\frac{a}{\text{tg}\,\varrho}+c\right)\right\}\left\{\mathrm{U}\,\text{sen}\,\omega-\mathrm{V}\cos\omega\right\}-\\
-\frac{\left(\log\left(1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\varrho}\right)+\log r\right)a^2}{r\sqrt{1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\varrho}}}\left\{u\left[\text{sen}\,\omega\cos\varrho-\cos ny\right]+\right.\\
\left.+v\left[-\cos\omega\cos\varrho+\cos nx\right]\right\}+\frac{a}{r}\left(\text{arco sen}\frac{a}{\text{tg}\,\varrho}+c\right)(u\,\text{sen}\,\omega - v\cos\omega).
\end{aligned}$$

« Osserviamo ora che sopra R′

$$\cos ny = \operatorname{sen} \omega \cos \varrho \,, \quad \cos nx = \cos \omega \cos \varrho \,,$$

quindi, togliendo i termini che si annullano, la espressione precedente diventerà

$$\Pi_{R'} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \varrho}} \left[ \log \left( 1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \varrho} \right) - 1 + \log r \right] [\mathrm{U} \operatorname{sen} \omega - \mathrm{V} \cos \omega] +$$

$$+ a \left( \operatorname{arco\,sen} \frac{a}{\operatorname{tg} \varrho} + c \right) \left\{ \frac{a}{\operatorname{tg} \varrho} [\mathrm{U} \operatorname{sen} \omega - \mathrm{V} \cos \omega] + \frac{1}{r} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right\}.$$

« Diminuiamo ora l'angolo $\varrho$ finchè si abbia

(5) $$\operatorname{tg} \varrho = a \,,$$

allora basterà prendere la costante arbitraria $c = -\frac{\pi}{2}$, perchè $\Pi_{R'}$, si annulli al limite.

« Perciò quando si suppone soddisfatta la (5) dovremo estendere nella (4) la integrazione a $\sigma'$ a $c'$ e a $\tau$ soltanto.

« Sopra $c'$ abbiamo

$$\theta = \frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} \,,$$

$$\cos nt = 0 \,, \ \cos nx = \cos \omega \,, \ \cos ny = \operatorname{sen} \omega \,,$$

quindi nei punti del cilindro $c'$, $\Pi$ assumerà la forma

$$\Pi_{c'} = - \left[ \sqrt{1 - \frac{a^2 (t_1 - t)^2}{\varepsilon^2}} \left( \log \left( 1 - \frac{a^2 (t_1 - t)^2}{\varepsilon^2} \right) - 1 + \log \varepsilon \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} \left( \operatorname{arco\,sen} \frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} + c \right) \right] a^2 \varpi +$$

$$+ \frac{\left( \log \left( 1 - \frac{a^2 (t - t_1)^2}{\varepsilon^2} \right) + \log \varepsilon \right) a^2}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{a^2 (t - t_1)^2}{\varepsilon^2}}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \,.$$

« Ma sopra $c'$ si ha

$$dc' = d\,\Sigma = \varepsilon \, d\,\omega \, dt$$

quindi ponendo

$$\frac{a(t - t_1)}{\varepsilon} = \eta \,, \quad dt = \frac{\varepsilon}{a} d\eta$$

avremo che la parte dell'integrale (4) estesa a $c'$ potrà scriversi

$$\int_{c'} \Pi_{c'} \, dc' = \frac{\varepsilon}{a} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^1 \left\{ - \left[ \sqrt{1 - \eta^2} \left( \log (1 - \eta^2) - 1 \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \eta \, (\operatorname{arco\,sen} \eta + c) \right] \varepsilon \, a^2 \varpi +$$

$$\left. + \frac{\log (1 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \eta^2}} a^2 (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right\} d\eta - a \varepsilon \log \varepsilon \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^1 \left\{ - \varepsilon \sqrt{1 - \eta^2} \, \varpi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right\} d\eta.$$

« Di qui si vede che facendo impiccolire indefinitamente $\varepsilon$, l'integrale esteso al cilindro $c'$ tende verso zero, e per conseguenza nella (4) potremo prendere per campo d'integrazione la superficie $\sigma'$ e il piano $\tau$. Sopra questo si ha

$$\cos nx = \cos ny = 0\,, \quad \cos nt = 1\,, \quad \theta = 0$$

onde, essendo $c = -\frac{\pi}{2}$ avremo che il valoro di $\Pi$ corrispondente ai punti di $\tau$ sarà

$$\Pi_\tau = (\log r - 1)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega - \frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(u \operatorname{sen}\omega - v\cos\omega).$$

« Se dunque chiamiamo $\Pi'_{\sigma'}$ il valore di $\Pi$ sopra la superficie $\sigma'$, otterremo la formula

$$(6')\qquad \int_{\sigma'} \Pi'_{\sigma'}\, d\sigma' = \int_\tau \left[ (\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\right] d\tau.$$

« 5. Analogamente consideriamo lo spazio S$''$ ed applichiamo lo stesso calcolo, Prendendo questa volta $c = \frac{\pi}{2}$, e chiamando $\Pi''_{\sigma''}$ il valore corrispondente di $\Pi$ sopra $\sigma''$, avremo

$$(6'')\qquad \int_{\sigma''} \Pi''_{\sigma''}\, d\sigma'' = -\int_\tau \left[ (\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\cos\omega - \frac{\partial u}{\partial t}\operatorname{sen}\omega\right) + \frac{\pi}{2}\frac{a}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\right] d\tau.$$

« Sommando le (6$'$) e (6$''$) avremo dunque

$$(6)\qquad \int_{\sigma'} \Pi'_{\sigma'}\, d\sigma' + \int_{\sigma''} \Pi''_{\sigma''}\, d\sigma'' = \pi a \int_\tau \frac{1}{r}(v\cos\omega - u\operatorname{sen}\omega)\, d\tau.$$

« Osserviamo che

$$\frac{\partial \log r}{\partial x_1} = -\frac{1}{r}\cos\omega\,, \qquad \frac{\partial \log r}{\partial y_1} = -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\omega$$

quindi il secondo membro della equazione precedente potrà scriversi

$$\pi a\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\tau u \log r\, d\tau - \frac{\partial}{\partial x_1}\int_\tau v\log r\, d\tau\right].$$

« Per conseguenza (Vedi fig. 2) essendo $s_a$ la solita superficie esterna al cono A che limita una porzione di spazio adiacente al vertice, e $s'_a$, $s''_a$ le due parti di essa divise dal piano $\tau$, posto

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\quad \Phi_a = \frac{1}{a}\int_{s_a}\Bigg\{ & \sqrt{1-\frac{a^2(t-t_1)^2}{r^2}}\,\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(\mathrm{U}\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right)+\\
&+\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{a^2}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\Bigg[u\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\right.\\
&\left.+\cos ny\right)-v\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\cos nx\right)\Bigg]\Bigg\}ds_a+\\
&+\int_{s_a}\Bigg\{\frac{t-t_1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(\mathrm{U}\,\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\,\frac{x-x_1}{r}\right)-\\
&-\frac{1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\,\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\Bigg\}ds_a-\\
-\frac{\pi}{2}\Bigg\{ & \int_{s'_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{\mathrm{U}\,\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\,\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds'_a-\\
& -\int_{s''_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{\mathrm{U}\,\frac{y-y_1}{r}-\mathrm{V}\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\,\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds''_a\Bigg\}
\end{aligned}
$$

avremo

$$
(7)\qquad \Phi_a=\pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\tau u\log r\,d\tau-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\tau v\log r\,d\tau\right].
$$

« In modo analogo possiamo operare partendo dagli integrali (VI) e si giunge allora alla seguente conclusione:

« Se $s_b$ è la porzione di $s_a$ inclusa nella parte esterna al cono B e $s'_b$, $s''_b$ sono le due parti in cui essa viene divisa dal piano $\tau$, posto

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad \Phi_b = \frac{1}{b}\int_{s_b}\Bigg\{ & \sqrt{1-\frac{b^2(t-t_1)^2}{r^2}}\,\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(\mathrm{U}\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)+\\
&+\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{b^2}{\sqrt{r^2-b^2(t-t_1)^2}}\Bigg[\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\right.\\
&\left.+\cos nx\right)u+\left(\frac{t-t_1}{r}\,\frac{y-y_1}{r}\cos nt+\cos ny\right)v\Bigg]\Bigg\}ds_b+\\
&+\int_{s_b}\Bigg\{\frac{t-t_1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(\mathrm{U}\,\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\,\frac{y-y_1}{r}\right)-\\
&-\frac{1}{r}\operatorname{arco\,sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\,\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\Bigg\}ds_b-\\
-\frac{\pi}{2}\Bigg\{ & \int_{s'_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(\mathrm{U}\,\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds'_b-\\
& -\int_{s''_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(\mathrm{U}\,\frac{x-x_1}{r}+\mathrm{V}\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds''_b\Bigg\},
\end{aligned}
$$

si ha

(8) $$\Phi_b = \pi \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_\tau u \log r \, d\tau + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\tau v \log r \, d\tau \right].$$

« 7. Dalle (7) e (8) segue immediatamente

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau$$

in cui si è posto per brevità

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

« Ma per un noto teorema sui potenziali logaritmici

$$\Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau = 2\pi \, u\,(x_1, y_1, t_1)$$

$$\Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau = 2\pi \, v\,(x_1, y_1, t_1)$$

quindi

(9) $$\left\{ \begin{aligned} u\,(x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} \right] \\ v\,(x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} \right]. \end{aligned} \right.$$

« Sono queste le formule cercate, esse sono le analoghe della formula (27) della Nota già citata *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi* ».

**Errata-Corrige** relativa alla Nota: *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* (vol. I, 2° sem., serie 5ª, fasc. 8°).

Nelle pag. 276 e 277 ogni qualvolta comparisce il binomio $\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}$, deve sostituirsi invece l'altro $\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{t - t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}$.

**Chimica.** — *Fluossimolibdato e fluossipomolibdato talloso.* Nota del Corrispondente F. Mauro.

Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.