ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

MDCIII

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 22 gennaio 1893.

A. Messedaglia Presidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su di una estensione della configurazione delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia.* Nota di Ernesto Pascal, presentata dal Socio Cremona.

« Nel lavoro fondamentale da me pubblicato negli Annali di Matematica (*Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e 4*, Annali v. XX) io ho considerato le caratteristiche di genere 3 e di genere 4, e in lavori seguenti mi sono poi occupato di sviluppare tutto quello che discendeva dalla considerazione delle caratteristiche di genere 3, e quindi ho studiato le tangenti doppie della quartica piana [1], le rette della superficie di 3° ordine [2], ecc.

« Ora vogliamo passare a fare qualcuna delle considerazioni analoghe pel genere 4, e allora potremo studiare configurazioni che saranno da ritenersi come estensioni delle precedenti.

(1) *Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana del 4° ordine.* (Lincei, dic. 1892, genn. 1893).

(2) *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi.* Annali v. 20; vedi anche varie comunicazioni nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, anni 1892-93.

« Così in luogo delle 315 coniche *coordinate* alla curva piana di 4° ordine, si avranno 32130 quadriche *coordinate* alla sestica storta di genere 4, e in luogo delle 27 rette della superficie di 3° ordine, si ha una configurazione di 119 piani nello spazio a 4 dimensioni.

« Abbiamo poi già altra volta avuto occasione di ricordare la dipendenza che c'è fra le rette della superficie di 3° ordine, e quelle della superficie di 4° ordine a conica doppia, e quelle della superficie di 5° ordine a quintica doppia. Se si sopprime una delle 27 rette di S_3 insieme a tutte quelle che la incontrano, le 16 rette rimanenti sono precisamente nella medesima configurazione che quelle della superficie di 4° ordine a conica doppia, e se di queste ultime 16 se ne sopprime una insieme a quelle che la incontrano, le 10 rimanenti formano esattamente la medesima configurazione che le 10 della superficie di 5° ordine con una quintica doppia.

« Ora qui ci proponiamo di considerare la estensione di queste 10 ultime rette. Troveremo che esse si estendono in una configurazione di 36 piani nello spazio a 4 dimensioni, e il gruppo delle sostituzioni fra questi 36 piani è *isomorfo* col gruppo delle 27 rette di S_3.

« Nel corso di questa Nota supporremo naturalmente che il lettore abbia presenti tutte le considerazioni da noi già svolte nella Memoria fondamentale succitata.

§ 1. — Preliminari.

« Il gruppo delle sostituzioni fra le caratteristiche *prime* di genere 4 possiede 136.96.10! sostituzioni [1], ed esso è doppiamente transitivo nelle caratteristiche dispari perchè la somma di due caratteristiche *prime* dà una caratteristica *elementare* ed il gruppo di monodromia è transitivo nelle caratteristiche elementari [2].

« Quindi se noi, senza tener più conto delle caratteristiche pari, consideriamo il sottogruppo che lascia fissa una delle 120 caratteristiche dispari, troviamo che esso è ancora transitivo nelle 119 caratteristiche rimanenti. — Tal sottogruppo ha per ordine 136.8.9!, e se, come abbiamo fatto pel genere 3, immaginiamo che ad ognuna di queste caratteristiche corrisponda un piano nello spazio a 4 dimensioni, e interpretiamo come proprietà stereometriche di questi piani le proprietà di parità o disparità degli aggruppamenti di caratteristiche dispari, abbiamo una configurazione che sarà da ritenersi come la estensione di quella delle 27 rette di S_3, e tali piani (pei risultati della nostra Mem. I) saranno rappresentabili in maniera analoga a quella con cui

(1) Mem. I, § 23.
(2) Id. § 3.

si rappresentavano le 27 rette di S_3, cioè con i piani che congiungono a tre a tre 10 punti fondamentali (escluso uno solo di essi). È necessario però spiegare qui in che maniera bisogna interpretare le proprietà stereometriche dei piani. Naturalmente non faremo che generalizzare quello che abbiamo già trovato per le rette di S_3, cioè diremo che tre piani (dello spazio a 4 dimensioni) formano uno spazio a tre dimensioni quando i loro piani rappresentativi formano col piano fisso una quaterna-zero (1), e quindi diremo che due di quei piani si incontrano (in una retta) quando è possibile trovarne un terzo che coi due e col piano fisso formi una quaterna-zero o, ciò che è lo stesso, quando essi col piano fisso dànno una terna dispari. Due piani formeranno un assieme *gobbo* quando saranno rappresentati da due che col piano fisso dieno una terna *pari*.

« È facile vedere allora, dato uno dei 119 piani, quanti formano con esso coppia gobba, e quanti no.

« Se x è il numero dei piani che col dato formano una coppia gobba, esso sarà ancora il numero di tutte le terne *pari* di caratteristiche dispari, aventi due dati piani fissi. Ma il numero di tutte le terne pari è 28.40.136 (2), dunque deve essere:

$$\frac{120 \,.\, 119 \,.\, x}{2 \,.\, 3} = 28 \,.\, 40 \,.\, 136$$

e quindi $x = 64$.

« Onde possiamo dire che ogni piano ne incontra (in una retta) altri 54 e non ne incontra (in una retta) 64.

« L'assieme di questi 64 piani è una configurazione che, come si capisce, può ritenersi come la estensione di quella delle 16 rette della superficie di Clebsch, le quali sono precisamente (nella loro configurazione) quelle 16 rette che non incontrano una delle 27 della superficie di 3° ordine. Vediamo ora uno di questi 64, quanti altri non ne incontra. Evidentemente la quistione si ridurrà a ricercare, data una terna pari, quanti piani vi si possono aggiungere in maniera che la quaterna così formata non abbia terne dispari.

« Teniamo presenti le considerazioni del § 15 della citata Mem. I e immaginiamo che la terna pari data sia del tipo V, e sia per esempio:

$$(123) \quad (124) \quad (125);$$

(1) V. Mem. I, § 15 e 27.

(2) Id. § 15. — Prendiamo questa occasione per notare che nella fig. 18ª della Mem. I è capitato un equivoco. Bisogna ivi scambiare fra loro i due tipi indicati con VII, VIII per uniformarsi alla trattazione del testo.

allora i piani che hanno la detta proprietà saranno:

$$\begin{array}{lllll} (345) & \text{in numero di} & & & 1 \\ (126) & » & » & » & 5 \\ (167) & » & » & » & 20 \\ (678) & » & » & » & 10 ; \end{array}$$

in tutto sono dunque 36; possiamo dire dunque che ognuno dei 64 piani di cui si è parlato ne incontra 27 di essi, e non incontra gli altri 36. Il gruppo delle sostituzioni fra i 64 piani è di ordine 9.8.8.8.6!

« Se togliamo uno di questi piani e gli altri 27 che lo incontrano si ha un assieme di 36 piani nello spazio a 4 dimensioni, la cui configurazione potrà ritenersi come la estensione di quella delle 10 rette della superficie di 5° ordine a quintica doppia. L'ordine del gruppo di sostituzioni fra questi 36 piani è 72.6! cioè esattamente quello del gruppo delle 27 rette della superficie di 3° ordine. Dimostreremo che i due gruppi sono isomorfi.

§ 2. — Gruppo di sostituzioni fra i 36 piani dello spazio a 4 dimensioni.

« Abbiamo già detto nel § precedente che i 36 piani di cui parliamo sono rappresentati da tutti quelli che con una data terna *pari* formano una quaterna non contenente terne *dispari*. Ci conviene di assumere qui per terna *pari* fondamentale una del tipo I (fig. 18ª della Mem. I), e propriamente quella dei tre piani:

$$(123) \ , \ (134) \ , \ (146) .$$

Vediamo allora quali sono i 36 piani. — Tenendo presenti le solite considerazioni del § 15 della Mem. cit., tali piani sono:

« 1) il piano (234);

« 2) i 15 piani passanti pel punto (1) e per due punti fra gli altri sei punti restanti;

« 3) i 20 piani passanti per 3 punti dei sei restanti.

« Il gruppo che lascia fisso uno dei 36 piani p. es.: (234) ha evidentemente per ordine 2 . 6!. Ora evidentemente se noi permutiamo in 6! modi i punti 5, 6, 7, 8, 9, 10, si avranno altrettante sostituzioni che lasciano fissi i 4 piani del tetraedro (1234) e che quindi apparterranno al nostro sottogruppo.

« Occorre ora che ci ricordiamo di un'osservazione interessante fatta alla fine del § 18 della cit. Mem.

« Abbiamo visto che in generale una sostituzione del gruppo delle caratteristiche di genere 4 è rappresentata dal passaggio di un sistema di Noether di 10 caratteristiche pari ad un altro analogo [1], e inoltre nel

[1] Mem I, § 23.

citato § 18 abbiamo poi visto che se si ha un sistema di Noether, e se ne staccano sei caratteristiche, e ad ognuna di queste si sostituisce la somma delle altre cinque, allora le sei nuove caratteristiche pari così formate insieme alle quattro lasciate inalterate, formano daccapo un sistema di Noether. Onde siccome i dieci punti fondamentali della rappresentazione, costituiscono precisamente un sistema di Noether, si ha che fra le sostituzioni del gruppo di monodromia vi saranno quelle ricavate col separare quattro dei punti dagli altri sei e col sostituire ad ognuno di questi sei, il gruppo degli altri cinque.

« Ora se facciamo questo nel nostro caso, col separare i 4 primi punti dagli ultimi sei, è evidente che il tetraedro resta ancora fisso, e chiamando σ una siffatta sostituzione, e unendola colle 6! sostituzioni già trovate, si hanno dunque 2.6! sostituzioni per le quali il tetraedro (1234) è fisso. Ma abbiamo già detto che tante appunto debbono essere tutte le sostituzioni che lasciano fisso uno dei 36 piani, dunque in tal maniera siamo venuti a costruire assai facilmente il gruppo delle sostituzioni che lasciano fisso il piano (234).

« È facile vedere che effetto hanno tutte queste sostituzioni sugli altri 35 piani.

« Prima di tutte queste sostituzioni permutano sempre un piano della classe 2) in uno della medesima classe, e così per un piano della classe 3). Inoltre la sostituzione σ non altera un piano della classe 2), e riunisce a due a due i piani della classe 3), cioè muta p. es. il piano (567) nel piano (8910) e viceversa.

« Ora si può vedere che questo sottogruppo è isomorfo con quello che lascia fissa una delle 36 bisestuple gobbe delle rette della superficie di 3° ordine. Infatti sappiamo che assegnati 8 punti che chiameremo:

$$(a) \quad (b) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10)$$

una delle 36 bisestuple è rappresentata dalle 12 rette:

$$\begin{matrix} (a\ 5) & (a\ 6) & (a\ 7) & (a\ 8) & (a\ 9) & (a\ 10) \\ (b\ 5) & (b\ 6) & (b\ 7) & (b\ 8) & (b\ 9) & (b\ 10) \end{matrix}$$

e le sostituzioni che lasciano fissa questa bisestupla sono rappresentate dalle 6! permutazioni dei 6 ultimi punti, accompagnate dallo scambio di due punti (a) (b).

« Ora ricordando la formazione delle altre 35 bisestuple si può subito riconoscere che *per esse* lo scambio dei punti (a) (b) è equivalente all'operazione σ di cui abbiamo parlato cioè all'operazione di sostituire a ciascuno degli ultimi sei punti, l'assieme dei cinque punti complementare, perchè infatti lo scambio dei punti (a) (b) lascia inalterate 15 delle bisestuple, e raccoglie a due a due le altre 20.

« Possiamo dunque asserire che il gruppo dei 36 piani è isomorfo con quello delle 36 bisestuple, e quindi è isomorfo con quello delle 27 rette di S_3.

« In questa occasione, mi piace di ricordare, fra le configurazioni il cui gruppo è isomorfo con quello delle 27 rette, quella studiata dal Witting generalizzando in un certo senso la configurazione di Hesse (1). Egli trova una configurazione di 360 punti e 360 piani, che corrispondono rispettivamente alle 360 biterne gobbe, e alle 360 coppie di bisestuple associate (2).

§ 3. — Proprietà della configurazione dei 36 piani.

« Dalle cose dette avanti risulta che la configurazione dei 36 piani è simile a quella delle 36 bisestuple gobbe da noi già studiate altrove, e di cui esponemmo brevemente i risultati, nella citata Nota II, all'Istituto Lombardo.

« Quindi ne ricaviamo che tutti i teoremi da noi altra volta trovati, opportunamente interpretati ci daranno teoremi relativi alla nostra nuova configurazione.

« Bisognerà però prima fissare in che senso bisogna interpretare quei teoremi; cioè a quali piani corrispondono due bisestuple aventi quattro rette comuni, e a quali piani due bisestuple aventi sei rette comuni (associate).

« Ora ripigliando la notazione del § precedente si vede che rispetto al piano (234) gli altri 35 si separano in $15 + 20$, e uno dei primi 15 forma terna *dispari* con due piani qualunque di quelli del tetraedro (1234) (§ 15 della Mem. I) mentre uno dei 20 piani forma terna *pari* con due qualunque di quelli del tetraedro.

« Per ciò che abbiamo detto nel § 1 possiamo dunque concludere che ogni piano ne incontra (in una retta) altri 15, e incontra in un punto (non in una retta) gli altri 20.

« Possiamo anche dire che gli assiemi di bisestuple, da noi chiamati assiemi di 2ª categoria (3) corrispondono ad assiemi *gobbi* di primi (nello spazio a 4 dimenzioni) e gli assiemi di 1ª categoria corrispondono ad assiemi *non gobbi*.

(1) Witting, *Ueber eine der Hesseschen Configuration analoge Configuration im Raume*. Diss. Gott. 1887; v. anche Math. Ann. 29.

(2) V. mia Nota II nell'Istituto Lombardo (Nov. 1892). — Le 18 rette di una coppia di bisestuple associate si possono separare in 3 biterne gobbe, intendendo per *biterna gobba* un assieme di due terne gobbe di rette, tali che ogni retta di una terna incontri tutte quelle dell'altra. Questa separazione può farsi in varî modi, ma ce ne è uno speciale in riguardo alla formazione delle bisestuple.

(3) V. Nota II nei Rendiconti dell'Istituto Lomb. 1892.

« Interpretando dunque in questa nuova configurazione alcuni teoremi già da noi trovati, possiamo dire:

« Esistono 360 coppie gobbe di piani.

« Esistono due diverse specie di terne gobbe di piani; una terna della « prima specie è caratterizzata dalla proprietà che non esiste un altro piano « formante con essa un assieme gobbo; mentre rispetto ad una terna di « 2ª specie ve ne sono quattro di tali piani. Vi sono 120 terne di 1ª specie « e 1080 di 2ª specie.

« Vi sono 1080 quaterne gobbe di piani, di una specie sola.

« Ognuna di esse individua un ultimo piano e si ha una quintina gobba; « queste quintine sono in numero di 216.

« Non esistono assiemi gobbi oltre le quintine.

« Vi è un sol piano che incontra (in una retta) tutti quelli di una quin- « tina gobba.

« Esistono 135 quaterne di piani incontrantisi a due a due in una retta « (tetraedri).

« Esistono 24 piani che incontrano (in una retta) due delle facce del « tetraedro, e incontrano in un punto solo le altre due. Non esistono piani « che incontrano in una retta tutti quelli di un tetraedro, o che incontrino « solo *una* delle facce, o solo *tre* delle faccie di un tetraedro.

« Esistono 8 piani gobbi con tutte le quattro facce di un tetraedro, e « questi 8 piani formano a loro volta in una sol maniera altri due tetraedri. « Di tali terne di tetraedri ve ne sono dunque 45, che corrispondono ai 45 « piani tritangenti formati colle 27 rette di S_3.

§ 4. — Radici dell'equazione di 27mo grado.

« Si sa che la risolvente di ordine più basso, di un'equazione il cui gruppo è isomorfo con quello delle 27 rette di S_3 è un'equazione di 27mo grado (1). Ora ci si presenta il problema di costruire le radici di questa equazione mediante i 36 piani della configurazione. La ricerca corrisponde a trovare come si esprimono, nel gruppo delle 27 rette, le radici dell'equazione di 27mo grado, mediante le bisestuple, e avremmo potuto fare questa ricerca quando abbiamo studiata la configurazione delle bisestuple.

« Nel § precedente siamo giunti a costruire le radici dell'equazione di 45mo grado mediante i 36 piani; ognuna di quelle radici corrisponde a tre certi tetraedri.

« Se ora queste ultime radici le raccogliamo opportunamente a cinque a cinque abbiamo le richieste radici dell'equazione di 27mo grado.

(1) Jordan, *Substitutions*. p. 316.

« Secondo la notazione del § 2 uno dei tetraedri di cui si è parlato alla fine del § 3, è formato di quattro piani:

$$(234) \quad (156) \quad (178) \quad (1910) \qquad (a^{\text{I}})$$

ed a questo sono poi coordinati altri due tetraedri le cui facce sono sempre gobbe con ciascuna di queste quattro.

« Evidentemente esistono altri *due soli* tetraedri contenenti le prime due facce di questo e sono:

$$(234) \quad (156) \quad (179) \quad (1810) \qquad (a^{\text{II}})$$
$$(234) \quad (156) \quad (1710) \quad (189) \qquad (a^{\text{III}})$$

e ve ne sono poi altri *due* contenenti le ultime due facce e sono:

$$(178) \quad (1910) \quad (578) \quad (5910) \qquad (a^{\text{IV}})$$
$$(178) \quad (1910) \quad (678) \quad (6910) \qquad (a^{\text{V}})$$

« Ad ognuno di questi tetraedri ne sono coordinati altri due nella solita maniera, e due di questi p. es. a^{II} a^{IV} non sono coordinati fra loro perchè il piano (178) non è gobbo con (179) e così di seguito. Questi tetraedri a due a due o hanno due facce comuni o nessuna. Si può verificare che collo stesso metodo partendo dai tetraedri coniugati ad (a^{I}) si giunge a quelli coniugati rispettivamente a (a^{II}) (a^{III}) (a^{IV}) (a^{V}).

« In questa maniera dunque le terne di tetraedri si riuniscono a 5 a 5 e danno $\frac{45.3}{5} = 27$ aggruppamenti.

« Per costituire dunque le radici dell'equazione di 27$^{\text{mo}}$ grado si deve procedere così: si considera una delle 45 terne di tetraedri, e si separano le facce di un tetraedro in $2+2$; si costruiscono i due altri tetraedri che hanno con quello in comune le due prime facce, e i due tetraedri che hanno con quello in comune le due altre facce, e di questi quattro si costruiscono i coniugati. Una funzione simmetrica delle cinque terne di tetraedri così ottenuti, rappresenta una radice dell'equazione di 27$^{\text{mo}}$ grado ».