ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Matematica. — *Dei sistemi di coordinate atti a ridurre la espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie alla forma* $ds^2 = (\mathrm{U} + \mathrm{V})\,(du^2 + dv^2)$. Nota del prof. G. Ricci, presentata dal Socio Beltrami.

« 1. Posto

$$\varphi = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

sia $\sqrt{\varphi}$ una espressione propria del quadrato dell'elemento lineare di una superficie e si designino con $a^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca $a\,\varphi$ (1). Un sistema semplicemente infinito di linee tracciate sopra questa superficie o sopra una qualunque delle superficie ad essa applicabili può essere definito mediante un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\Sigma_q\, a_{rq} \frac{dx_q}{ds} = \chi_r\,,$$

purchè χ_1 e χ_2 soddisfacciano alla equazione

$$\Sigma_{rs}\, a^{(rs)}\, \chi_r\, \chi_s = 1. \tag{1}$$

Dato in fatti il sistema di linee e fissate per queste le loro direzioni positive, è determinato un sistema semplice covariante χ_r, che soddisfa alle (1), e viceversa, dato un tale sistema, è determinato un sistema semplicemente infinito di linee e sono anche fissate le direzioni positive di queste. Chiamerò questo sistema di linee così determinato sistema χ_r, e il sistema semplice covariante χ_r sarà il suo *sistema coordinato*. Considerando poi il sistema delle traiettorie ortogonali alle linee χ_r ne intenderò fissate le direzioni positive in modo che stiano alle χ_r stesse come l'asse delle y a quello delle x e ne designerò con $\overline{\chi}_r$ il sistema coordinato.

« Se λ e ϱ sono dei parametri qualunque dei sistemi χ_r e $\overline{\chi}_r$ e si scelgono opportunamente i segni di $\varDelta_1\lambda$ e $\varDelta_1\varrho$ si dimostrano facilmente le identità

$$\chi_r = \frac{1}{\varDelta_1\varrho} \frac{d\varrho}{dx_r}\,, \qquad \overline{\chi}_r = \frac{1}{\varDelta_1\lambda} \frac{d\lambda}{dx_r}\,.$$

« Se si designano con ds e δs rispettivamente gli elementi lineari delle linee χ_r e $\overline{\chi}_r$, con γ e (γ) le loro curvature geodetiche in uno stesso punto della superficie, con G la curvatura assoluta di questa, con df e δf le va-

(1) A schiarimento di alcune locuzioni e notazioni, di cui farò uso in questa Nota, vedasi il mio *Résumé de quelques travaux* ecc., nel fascicolo di Giugno 1892 del *Bulletin* del sig. Darboux.

riazioni di una funzione qualunque f dovute agli incrementi ds e δs si ha, come è noto, l'identità

$$2)\qquad \frac{d(\gamma)}{ds} - \frac{\delta\gamma}{\delta s} + \gamma^2 + (\gamma)^2 + G = 0.$$

Se poi si pone

$$\chi_{rs} \equiv D_\varphi(\chi_r),$$

se cioè con χ_{rs} si rappresentano gli elementi del sistema doppio covariante derivato dal sistema semplice χ_r secondo la forma fondamentale φ, si hanno le identità

$$3)\qquad \chi_{rs} = \overline{\chi_r}\left(\gamma\chi_s + (\gamma)\overline{\chi_s}\right).$$

« 2. La condizione di isotermia dei due sistemi χ_r e $\overline{\chi}_r$ sopra considerati può ridursi, come è noto, alla forma

$$\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\delta(\gamma)}{\delta s} = 0.$$

Verificata questa condizione, il sistema semplice

$$\nu_r = \gamma\overline{\chi}_r - (\gamma)\chi_r$$

risulta delle derivate di una funzione ν rispetto alle χ_r. Del pari i sistemi semplici

$$\lambda_r = e^\nu\overline{\chi}_r\,, \quad \varrho_r = e^\nu\chi_r$$

risultano delle derivate di due funzioni λ e ϱ, che sono precisamente i parametri isometrici delle linee χ_r e $\overline{\chi}_r$. Il sistema $\overline{\chi}_r$ può esprimersi algebricamente pel sistema χ_r e quindi si conclude che

« Noto il sistema coordinato d'un sistema di linee isoterme, se ne può « ottenere il parametro isometrico con semplici quadrature ».

« 3. Se esiste un sistema di variabili u e v capace di ridurre la espressione di φ alla forma

$$(U + V)(du^2 + dv^2)\,,$$

U e V essendo funzioni rispettivamente di u e di v soltanto, dirò che il sistema di coordinate (uv) sulle superficie, il cui elemento lineare è espresso da $\sqrt{\varphi}$, è un sistema isotermo di Liouville.

« Perchè due sistemi ortogonali di linee γ_r e $\overline{\chi}_r$ tracciati sopra una « superficie costituiscano un sistema isotermo di Liouville, è necessario e « sufficiente che siano soddisfatte le condizioni

$$4)\qquad \frac{d\gamma}{ds} + 3\gamma(\gamma) = 0\,, \qquad \frac{\delta(\gamma)}{\delta s} - 3\gamma(\gamma) = 0 \text{ ».}$$

La condizione di isotermia sopra riferita è evidentemente conseguenza di queste.

« 4. Mi sono proposto il seguente problema:

« Data una espressione dell'elemento lineare di una superficie, stabilire « le condizioni necessarie e sufficienti perchè sulla superficie stessa e quindi

« su tutte le superficie ad essa applicabili esista almeno un sistema isotermo « di Liouville e, verificate queste condizioni, determinare tutti i sistemi iso« termi di Liouville, di cui la superficie è dotata ».

« Indicherò sempre con $\sqrt{\varphi}$ la espressione dell'elemento lineare, di cui si tratta; con G la curvatura totale della superficie. Pel teorema del § 3 il problema proposto equivale a ricercare se ed in quanti modi è possibile soddisfare alle equazioni (1), (2), (3) e (4), in cui tutte le funzioni sono incognite, eccettuati i coefficienti di φ e quindi G.

« Introducendo una indeterminata α, si può sostituire alla equazione (2) il sistema equivalente

$$\text{2}') \qquad \frac{\delta\gamma}{\delta s} = \frac{1}{2}(\alpha + G) + (\gamma)^2, \qquad \frac{d(\gamma)}{ds} = \frac{1}{2}(\alpha - G) - \gamma^2.$$

Queste, assieme alle (4), ci dànno le derivate prime delle funzioni incognite γ e (γ) espresse in funzione della incognita α e di G. Eliminando le derivate stesse si perviene alle equazioni

$$\text{5)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(\alpha + G)}{ds} + 2(\gamma) \left\{ 4\left(\gamma^2 + (\gamma)^2\right) + G + 3\alpha \right\} = 0 \\ &\frac{\delta(\alpha - G)}{\delta s} + 2\gamma \left\{ 4\left(\gamma^2 + (\gamma)^2\right) + G - 3\alpha \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

e da queste, eliminando ancora le derivate di α e ponendo

$$G_{rs} \equiv D_{\varphi\varphi}(G),$$

si ottiene la equazione

$$\text{6)} \qquad 5\left\{ (\gamma)\frac{\delta G}{\delta s} - \gamma \frac{dG}{ds} \right\} + \Sigma_{pq}\, G_{pq} \frac{dx_p}{ds}\frac{\delta x_q}{\delta s} = 0.$$

« Se G è costante, questa equazione si riduce ad una identità, il sistema di equazioni a derivate parziali di 1° ordine, che comprende le (1), (2′), (3), (4) e (5) è incondizionatamente integrabile, ed il suo sistema integrale generale contiene quattro costanti arbitrarie [1]. Si perviene così al seguente teorema del resto già noto

« Sopra ogni superficie a curvatura costante esiste un numero ∞^4 di si« stemi isotermi di Liouville ».

« 5. Ora supporrò G variabile, designerò con k_r e $\bar{k}_r$ i sistemi coordinati delle linee G = costante (che chiamerò anche semplicemente linee G) e delle loro traiettorie ortogonali, le cui direzioni positive supporrò stiano a quelle delle linee G, come le linee $\bar{\chi}_r$ stanno rispetto alle χ_r. Rappresentando al solito con $\Delta_2 G$ il parametro differenziale di 2° ordine di G preso considerando φ come forma fondamentale, si ha, come è noto,

$$\Delta_2 G = \Sigma_{rs}\, a^{(rs)}\, G_{rs}.$$

[1] Vedasi: Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Abschnitt, Kapitel 10.

Si hanno pure le identità

$$\varDelta_1\, \mathrm{G}.g = -\Sigma_{pq}\, \mathrm{G}_{pq} \frac{d' x_p}{d\sigma} \frac{d' x_q}{d\sigma}\,, \quad \varDelta_1\, \mathrm{G}.(g) = -\Sigma_{pq}\, \mathrm{G}_{pq} \frac{d' x_p}{d\sigma} \frac{\delta' x_q}{\delta\sigma}\,,$$

in cui $d\sigma$ e $\delta\sigma$ rappresentano gli elementi lineari delle linee k_r e $\overline{k}_r$, d' e δ' le variazioni dovute agli incrementi $d\sigma$ e $\delta\sigma$. Da esse e dalla precedente, posto

$$2\varDelta_1\, \mathrm{G}.h = \varDelta_2\, \mathrm{G},$$

si traggono le

$$\frac{1}{\varDelta_1\, \mathrm{G}} \cdot \mathrm{G}_{rs} = h a_{rs} - (h+g)\,(k_r\, k_s - \overline{k}_r\, \overline{k}_s) - (g)\,(k_r\, \overline{k}_s + \overline{k}_r\, k_s).$$

Coll'aiuto di queste la equazione (6) si riduce alla forma

6') $$5\,\{ (\gamma) \cos\psi + \gamma \operatorname{sen}\psi \} = (h+g) \operatorname{sen} 2\psi + (g) \cos 2\psi\,,$$

designandosi con ψ l'angolo, che le linee G fanno colle linee χ_r. Supponendo $\psi = 0$ o $\psi = \pi$, e quindi $(\gamma) = (g)$ o $(\gamma) = -(g)$ dalle (6') si trae $(g){=}0$, donde si conclude che, se si suppone che le linee G facciano parte di un sistema isotermo di Liouville, ne segue che esse sono anche parallele. Dunque

« Sopra le superficie a curvatura totale variabile G, che non sono ap-
« plicabili sopra delle superficie di rotazione, le linee G non fanno mai parte
« di un sistema isotermo di Liouville ».

« 6. In vece delle due funzioni incognite γ e (γ) legate fra loro dalla relazione (6') introduco ora una sola funzione incognita μ sostituendo alla equazione stessa il sistema equivalente

$$5\gamma = (g+h-\mu) \cos\psi - (g) \operatorname{sen}\psi$$
$$5\,(\gamma) = g \cos\psi + (g+h-\mu) \operatorname{sen}\psi.$$

Si possono allora stabilire direttamente le equazioni

I) $$5\,\frac{d\psi}{dx_r} = (4g - h + \mu \cos 2\psi)\, k_r + (4\,(g) - \mu \operatorname{sen} 2\psi)\, \overline{k}_r$$

e le condizioni necessarie e sufficienti perchè:

1° Questo sistema di equazioni sia integrabile;

2° Tra i valori di ψ, che vi soddisfanno, ne esista almeno uno tale che il corrispondente sistema di linee χ_r appartenga ad un sistema isotermo di Liouville.

« Posto

7) $$p = \frac{\delta' h}{\delta\sigma} - gh - 4\mathrm{G}\,, \quad q = \frac{d' h}{d\sigma} + h\,(g)$$

$$\mathrm{A} = 4\,(g+h)^2 + 6\,(g)^2 + 25\mathrm{G} - 10\,\frac{\delta'(g+h)}{\delta\sigma}$$

$$\mathrm{B} = -2\,(g)\,(g+h) - 10\,\frac{\delta'(g)}{\delta\sigma}$$

si perviene così alle equazioni

$$\text{II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d'\mu}{d\sigma} &= \left(p - \frac{2}{5}\mu^2\right) \operatorname{sen} 2\psi - q \cos 2\psi + \frac{3}{5}(g)\mu \\ \frac{d'\mu}{\delta\sigma} &= q \operatorname{sen} 2\psi + \left(p - \frac{2}{5}\mu^2\right) \cos 2\psi - \frac{3}{5} g\mu + \frac{2}{5} h\mu \end{aligned} \right.$$

ed alla

$$\text{III)} \qquad 14\,(g)\,\mu = \mathrm{A} \operatorname{sen} 2\psi + \mathrm{B} \cos 2\psi.$$

Finalmente, eliminando le derivate di μ tra le (II), si perviene alla equazione

$$\text{IV)} \qquad 14\, q\mu = \mathrm{A}' \operatorname{sen} 2\psi + \mathrm{B}' \cos 2\psi\,,$$

nella quale si è posto

$$\mathrm{A}' = 6\left(pg + q\,(g)\right) - 4ph + 5\left(\frac{\delta' p}{\delta\sigma} - \frac{d' q}{d\sigma}\right)$$

$$\mathrm{B}' = 6\left(p\,(g) - qg\right) + 4qh - 5\left(\frac{d' p}{d\sigma} + \frac{\delta' q}{\delta\sigma}\right).$$

« 7. Poichè, come si dimostra facilmente, si ha

$$\text{8)} \qquad -2q = \frac{d' g}{d\sigma} + \frac{\delta'(g)}{\delta\sigma},$$

le superficie applicabili sopra una superficie di rotazione sono caratterizzate dalle equazioni

$$(g) = q = 0$$

ed è facile verificare che il sistema di equazioni (I), (II), (III) e (IV) è in questo caso soddisfatto per $\psi = 0$ e $\mu = h - 4g$ e quindi che le linee G fanno parte di un sistema isotermo di Liouville.

« Prescindendo da questa soluzione, la equazione (III) si riduce in questo caso alla $\mathrm{A} = 0$ e siccome si ha pure (§ 1)

$$\text{9)} \qquad \frac{\delta' g}{\delta\sigma} = g^2 + \mathrm{G}$$

e per le (7) ed (8)

$$\frac{d' g}{d\sigma} = \frac{d' h}{d\sigma} = 0\,,$$

questa ci dà

$$\text{10)} \qquad \frac{\delta' h}{\delta\sigma} = \frac{3}{2}\,\mathrm{G} + \frac{2h\,(2g + h) - 3g^2}{5}$$

e quindi

$$\text{11)} \qquad p = -\frac{5}{2}\,\mathrm{G} + \frac{h\,(2h - g) - 3g^2}{5}$$

e

$$\frac{d' p}{d\sigma} = 0.$$

« La equazione (IV) si riduce quindi alla $A' = 0$, cioè alla

$$5 \frac{d'p}{\delta\sigma} = 2p\,(2h - 3g),$$

la quale confrontata colla (11) diventa

$$\text{A)} \qquad 25 \Delta_1 G = 3\,(2h - 3g)\left(5G + 2g\,(g + h)\right)$$

ed è facile convincersi che la (10) è una conseguenza di questa. Concludiamo che:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè sopra una superficie a « curvatura totale variabile G, su cui le linee G sono insieme parallele ed « isoterme, e che è quindi applicabile sopra una superficie di rotazione, esistano « dei sistemi isotermi di Liouville, oltre a quello, di cui fanno parte le linee G, « è data dalla (A). — Verificata questa condizione, il numero dei sistemi « cercati è ∞^2 e questi si ottengono tutti integrando il sistema incondizio- « natamente integrabile, che risulta delle (I) e (II) dopo avervi posto $q=(g)=0$ « e per p il valore dato dalla (11) ».

« 8. Se si suppone soltanto $(g) = 0$, si hanno ancora le (9) e (10), mentre la (7) e la (8) dànno

$$\text{12)} \qquad \frac{d'g}{d\sigma} = -2q\,, \quad \frac{d'h}{d\sigma} = q.$$

Eliminando le derivate di g e di h tra tutte queste equazioni si perviene alle relazioni

$$5 \frac{\delta' q}{\delta\sigma} = 15\,gq = (21\,g - 4h)\,q$$

e quindi, escludendosi ora il caso di $q = 0$, alla

$$2h = 3g,$$

la quale è in contraddizione colle (12). Dunque

« Le superficie a curvatura totale G variabile e sulle quali le linee G « sono parallele, ma non isoterme, non ammettono alcun sistema isotermo di Liouville ».

« 9. Dal confronto delle equazioni (III) e (IV) risulta che

« Se le equazioni

$$qA = (g)\,A'\,, \qquad qB = (g)\,B'$$

« non sono identicamente soddisfatte, le superficie, il cui elemento lineare è « espresso da $\sqrt{\varphi}$ e che si suppongono non applicabili sopra delle superficie « di rotazione, ammettono al più un sistema isotermo di Liouville, se tale « è il sistema doppio ortogonale, per cui l'angolo ψ, che uno dei due sistemi « di linee, che lo compongono, fa colle linee G, soddisfa alla equazione

$$\{ qA - (g)\,A' \} \operatorname{sen} 2\psi + \{ qB - (g)\,B' \} \cos 2\psi = 0 \quad ».$$

« Di questo teorema diamo alcuni corollari.

« Si supponga dapprima $q=0$ e $(g) \lesseqgtr 0$. Avremo

$$A' = 6pg - 4ph + 5\frac{\delta' p}{\delta \sigma}$$

e poichè, come risulta eliminando tra le (7) le derivate di h, si ha in questo caso

$$\frac{d'p}{d\sigma} = -2(g)(p+4G) \tag{13}$$

avremo anche

$$B' = 8(g)(2p+5G).$$

Non può dunque essere $B'=0$, se non si ha

$$2p = -5G$$

e quindi

$$\frac{d'p}{d\sigma} = 0$$

e per la (13) $G=0$. Dunque in questo caso la equazione, che, secondo il teorema precedente, determina la tangente di 2ψ, non può essere identicamente soddisfatta e possiamo concludere che

« Le superficie, per cui le linee G sono isoterme e non parallele ammet-
« tono al più un sistema isotermo di Liouville, se tale è il sistema doppio
« ortogonale, per cui la tangente dell'angolo 2ψ è determinata dalla equazione

$$« \left(6pg - 4ph + 5\frac{\delta' p}{\delta\sigma}\right) \operatorname{sen} 2\psi + 8(g)(2p+5G)\cos 2\psi = 0 \text{ ».}$$

« In secondo luogo supponiamo che $\sqrt{\varphi}$ rappresenti l'elemento lineare di una superficie a curvatura media costante. Se questa è data ed eguale a c è perciò necessario e sufficiente che si abbia (¹)

$$\Delta_2 \log(G - c^2) = 4G.$$

Tenendo conto di questa, la equazione, che determina la tangente di 2ψ, si riduce ad una forma semplicissima, e ne risulta che pel teorema del § 6 essa non può mai essere identicamente soddisfatta. Abbiamo così che

« Se $\sqrt{\varphi}$ è una espressione dell'elemento lineare di una superficie a
« curvatura media costante non applicabile sopra una superficie di rotazione,
« su tale superficie esiste tutt' al più un sistema isotermo di Liouville se
« tale è quello, per cui la tangente dell'angolo 2ψ è determinata dalla
« equazione

$$(h+g)\operatorname{sen} 2\psi + (g)\cos 2\psi = 0 \text{ ».}$$

(¹) Vedasi la Memoria del prof. Padova, *Sulla teoria generale delle superficie*, letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna il dì 27 aprile 1890.

« Confrontando poi questa equazione colla (6′) si perviene alla

$$(\gamma)\cos\psi + \gamma \operatorname{sen}\psi = 0\,,$$

nella quale, ricordando i significati di γ, (γ) e ψ, si legge una notevole proprietà dei sistemi isotermi di Liouville sulle superficie, di cui ci occupiamo.

« 10. Se le equazioni

$$qA = (g)\,A'\,, \qquad qB = (g)\,B'$$

sono identicamente soddisfatte, le equazioni (III) e (IV) coincidono e, supponendo $(g) \lesseqgtr 0$, la (III) determina μ. Se questo valore di μ è tale che soddisfi identicamente alle (II), quando per le derivate di ψ si pongano i valori dati dalle (I), le (I) stesse, in cui per μ siasi sostituito l'accennato valore, costituiscono un sistema incondizionatamente integrabile, il cui integrale generale ammette una costante arbitraria.

« Ora, posto

$$14(g)\,P = A\,, \qquad 14(g)\,Q = B$$

$$C = 5\,\frac{d'P}{d\sigma} - 5p + 2Q\,(h - 4g) + P\,\big(2P - 3\,(g)\big)$$

$$D = 5\,\frac{d'Q}{d\sigma} + 5q - 2P\,(h - 4g) + Q\,\big(2P - 3\,(g)\big)$$

$$C' = 5\,\frac{\delta' P}{\delta\sigma} - 5q - 8\,(g)\,Q + P\,(2Q + 3g - 2h)$$

$$D' = 5\,\frac{\delta' Q}{\delta\sigma} - 5p + 8\,(g)\,P + Q\,(2Q + 3g - 2h)\,,$$

se si eseguiscono le accennate sostituzioni nel sistema (II), si perviene alle equazioni

$$14)\quad \left\{ \begin{aligned} C \operatorname{sen} 2\psi + D \cos 2\psi &= 0 \\ C' \operatorname{sen} 2\psi + D' \cos 2\psi &= 0. \end{aligned} \right.$$

Abbiamo dunque che

« Le condizioni necessarie e sufficienti perchè esistano infiniti sistemi di « Liouville sopra una superficie a curvatura totale variabile G, su cui le « linee G non sono parallele, sono date dalle equazioni

$$C = D = C' = D' = 0\,.$$

« Verificate queste, la superficie è dotata di un numero semplicemente in- « finito di sistemi isotermi di Liouville, i quali si ottengono integrando il « sistema di equazioni (I) dopo avervi sostituito per μ il valore dato dalla « equazione (III). In questo sistema, che è incondizionatamente integrabile, « la funzione incognita ψ rappresenta l'angolo, che le linee di uno dei due « sistemi ortogonali costituenti il sistema isotermo di Liouville fa colle « linee G ».

« 11. Se, essendo sempre soddisfatte le equazioni

$$qA = (g)\,A', \quad qB = (g)B',$$

non sono soddisfatte tutte le equazioni

$$C = D = C' = D' = 0,$$

sulle superficie, di cui $\sqrt{\varphi}$ rappresenta l'elemento lineare, esisterà al più un sistema isotermo di Liouville. Perchè un tale sistema esista dovrà però essere soddisfatta la equazione

$$CD' - C'D = 0,$$

e verificata questa condizione il sistema di Liouville, se esiste, sarà quello, per cui la tangente dell'angolo $2\,\psi$ è determinata da una qualunque delle equazioni (11).

« 12. Quando, come nei casi considerati nei §§ 9 e 11, si ha una equazione in termini finiti, che determina la tangente di 2ψ, per 2ψ si può prendere uno qualunque dei valori corrispondenti compresi tra o e π, e le χ_r di uno dei due sistemi di linee, che costituiscono il sistema isotermo di Liouville, se questo esiste, sono date dalle equazioni

$$\chi_r = \cos\psi\, k_r - \operatorname{sen}\psi \overline{k}_r,$$

Da queste si possono dedurre le espressioni delle curvature geodetiche γ e (γ) e secondo il teorema del § 3, si potrà verificare, anche senza conoscere le equazioni in termini finiti delle linee χ_r e $\overline{\chi}_r$, se esse costituiscono o meno un sistema isotermo di Liouville.

« Tanto poi in questi casi, come in quello considerato nel § 10, determinato l'angolo ψ e quindi il sistema coordinato delle linee χ_r, se queste e le $\overline{\chi}_r$ costituiscono un sistema isotermo di Liouville, i loro parametri isometrici si potranno ottenere (§ 2) con semplici quadrature ».

Geodesia. — *Collegamento della specola geodetica di S. Pietro in Vincoli cogli Osservatorî astronomici del Collegio Romano e del Campidoglio.* Nota di V. Reina, presentata dal Socio Cremona.

« Se s_1 ed α_1 sono le coordinate geodetiche polari del punto A_1 rispetto al punto P, le sue coordinate geodetiche rettangolari, per valori di s_1 inferiori a 500000 m., sono definite dalle formole [1]:

$$1)\quad \begin{cases} X_1 = s_1 \operatorname{sen}(\alpha_1 - \varepsilon) \qquad Y_1 = s_1 \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon) \\ 3\varepsilon = s_1{}^2 \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \varepsilon)\cos(\alpha_1 - 2\varepsilon)}{2\varrho N \operatorname{sen} 1''}, \end{cases}$$

[1] Cfr. Giunta Superiore del Catasto, *Istruzione per i lavori trigonometrici*. Roma 1889. — Nicodemo Jadanza, *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche*. Torino 1891.