

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

“ 11. Se, essendo sempre soddisfatte le equazioni

$$qA = (g)A', \quad qB = (g)B',$$

non sono soddisfatte tutte le equazioni

$$C = D = C' = D' = 0,$$

sulle superficie, di cui \sqrt{g} rappresenta l'elemento lineare, esisterà al più un sistema isoterma di Liouville. Perchè un tale sistema esista dovrà però essere soddisfatta la equazione

$$CD' - C'D = 0,$$

e verificata questa condizione il sistema di Liouville, se esiste, sarà quello, per cui la tangente dell'angolo 2ψ è determinata da una qualunque delle equazioni (11).

“ 12. Quando, come nei casi considerati nei §§ 9 e 11, si ha una equazione in termini finiti, che determina la tangente di 2ψ , per 2ψ si può prendere uno qualunque dei valori corrispondenti compresi tra 0 e π , e le χ_r di uno dei due sistemi di linee, che costituiscono il sistema isoterma di Liouville, se questo esiste, sono date dalle equazioni

$$\chi_r = \cos \psi k_r - \sin \psi \bar{k}_r,$$

Da queste si possono dedurre le espressioni delle curvatures geodetiche γ e (γ) e secondo il teorema del § 3, si potrà verificare, anche senza conoscere le equazioni in termini finiti delle linee χ_r e $\bar{\chi}_r$, se esse costituiscono o meno un sistema isoterma di Liouville.

“ Tanto poi in questi casi, come in quello considerato nel § 10, determinato l'angolo ψ e quindi il sistema coordinato delle linee χ_r , se queste e le $\bar{\chi}_r$ costituiscono un sistema isoterma di Liouville, i loro parametri isometrici si potranno ottenere (§ 2) con semplici quadrature ”.

Geodesia. — Collegamento della specola geodetica di S. Pietro in Vincoli cogli Osservatori astronomici del Collegio Romano e del Campidoglio. Nota di V. REINA, presentata dal Socio CREMONA.

“ Se s_1 ed α_1 sono le coordinate geodetiche polari del punto A_1 rispetto al punto P , le sue coordinate geodetiche rettangolari, per valori di s_1 inferiori a 500000 m., sono definite dalle formole (1):

$$1) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = s_1 \sin(\alpha_1 - \varepsilon) \quad Y_1 = s_1 \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon) \\ 3\varepsilon = s_1^2 \frac{\sin(\alpha_1 - \varepsilon) \cos(\alpha_1 - 2\varepsilon)}{2qN \sin 1''} \end{array} \right.$$

(1) Cfr. Giunta Superiore del Catasto, *Istruzione per i lavori trigonometrici*. Roma 1889. — Nicodemo Jadanza, *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche*. Torino 1891.

intendendo con q ed N i valori del raggio di curvatura del meridiano e della gran normale nel punto P dell'ellissoide terrestre. Con $3s$ si rappresenta quindi l'eccesso sferico del triangolo geodetico $A_1 P Q_1$. — Considerando le grandezze $\frac{s_1}{q} \frac{s_1}{N}$ come piccole del 1° ordine, e trascurando le grandezze piccole del 4° ordine, dalle formole precedenti si ricavano le inverse:

$$s_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = X_1 \left(1 + \frac{Y_1^2}{6qN} \right)$$

$$s_1 \operatorname{cos} \alpha_1 = Y_1 \left(1 - \frac{X_1^2}{3qN} \right),$$

le quali permettono di calcolare le coordinate geodetiche polari, quando siano date le rettangolari.

• Allo scopo di determinare la variazione dell'azimut α_1 , che corrisponde ad uno spostamento dell'estremo P della geodetica, si pongano le ultime relazioni sotto la forma:

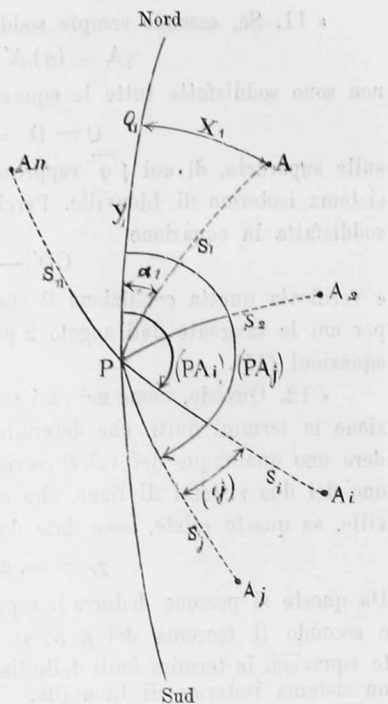
$$2) \left\{ \begin{array}{l} s_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = (X_1 - X) \left\{ 1 + \frac{(Y_1 - Y)^2}{6qN} \right\} \\ s_1 \operatorname{cos} \alpha_1 = (Y_1 - Y) \left\{ 1 - \frac{(X_1 - X)^2}{3qN} \right\}, \end{array} \right.$$

cioè si introducano le coordinate XY dell'estremo P , supponendo trasportata l'origine in una posizione qualunque, ma *prossima* al punto P . Per meglio precisare questa restrizione, si noti che le coordinate XY si possono considerare come piane, con un errore relativo inferiore ad $\frac{1}{200000}$, ogniqualvolta il punto P cade entro il cerchio geodetico descritto con raggio eguale a 24 chilometri intorno all'origine, come centro (1). In questa ipotesi, e dentro i limiti della suddetta approssimazione, sarà dunque pienamente legittima la sostituzione sopra effettuata.

• Dalle 2) si ricava, a meno di quantità piccole del 4° ordine:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{X_1 - X}{Y_1 - Y} \left\{ 1 + \frac{(X_1 - X)^2}{3qN} + \frac{(Y_1 - Y)^2}{6qN} \right\}.$$

(1) Cfr. N. Jadanza, op. cit., pag. 20.



« Se ora si suppone che le coordinate XY subiscano le variazioni dX dY , e si differenzia logicamente questa equazione, si ottiene:

$$d\alpha_1 = \frac{\text{sen } \alpha_1 \cos \alpha_1}{\text{sen } 1''} \left(-\frac{dX}{X_1 - X} + \frac{dY}{Y_1 - Y} - 2\mu \frac{X_1 - X}{3\varrho N} dX - \mu \frac{Y_1 - Y}{3\varrho N} dY \right)$$

dove la variazione $d\alpha_1$ si suppone espressa in secondi, e con μ si rappresenta il modulo dei logaritmi decimali. Gli ultimi due termini fra parentesi sono in ogni caso trascurabili di fronte ai primi, ed eliminando ancora $\text{sen } \alpha_1$, $\cos \alpha_1$ per mezzo delle 2), si otterrà:

$$d\alpha_1 = -\frac{Y_1 - Y}{s_1^2 \text{sen } 1''} \left[1 - \frac{(X_1 - X)^2}{3\varrho N} + \frac{(Y_1 - Y)^2}{6\varrho N} \right] dX + \\ + \frac{X_1 - X}{s_1^2 \text{sen } 1''} \left[1 + \frac{(Y_1 - Y)^2}{6\varrho N} - \frac{(X_1 - X)^2}{3\varrho N} \right] dY$$

ossia, dentro i limiti dell'approssimazione finora conservata,

$$3) \quad d\alpha_1 = -\frac{\cos \alpha_1}{s_1 \text{sen } 1''} \left(1 + \frac{s_1^2 \cos^2 \alpha_1}{6\varrho N} \right) dX + \frac{\text{sen } \alpha_1}{s_1 \text{sen } 1''} \left(1 - \frac{s_1^2 \text{sen}^2 \alpha_1}{3\varrho N} \right) dY.$$

« Se si vuole che l'errore relativo, che si commette trascurando i due termini correttivi, non ecceda $\frac{1}{100000}$ basterà che sia:

$$\frac{s^2}{3\varrho N} < \frac{1}{100000}$$

ossia:

$$s < 35000 \text{ m.}$$

« Ora anche nell'ipotesi sfavorevole che dX dY siano così grandi da produrre una variazione di $10'$ nell'azimut, sarebbe $\frac{10'}{100000} = 0''.006$, quantità inferiore agli errori di osservazione, quindi per distanze inferiori a quella precedentemente definita e per variazioni dell'azimut inferiori a $10'$ sarà lecito ridurre la 3) alla forma semplice:

$$4) \quad d\alpha_1 = -\frac{\cos \alpha_1}{s_1 \text{sen } 1''} dX + \frac{\text{sen } \alpha_1}{s_1 \text{sen } 1''} dY,$$

e questa è la solita formola valida nel caso delle coordinate piane (1).

« Il limite massimo di $10'$ precedentemente supposto nella variazione dell'azimut è affatto irraggiungibile nelle ordinarie questioni geodetiche: se si suppone che tale variazione non superi i $5'$ e si vuole che l'ammontare dei termini correttivi non ecceda $0''.01$ basterà che sia:

$$s < 64000 \text{ m.}$$

e la 4) diverrà generalmente applicabile ai lati dei triangoli di 1° ordine.

« Si può dunque enunciare il teorema:

(1) Cfr. ad es. Jordan, *Handbuch der Vermessungskunde*, 1^{er} Band § 55, 3^{te} Auflage avendo riguardo alla diversità delle notazioni.

• Quella stessa formola, che determina la variazione dell'azimut di un raggio per mezzo delle variazioni delle coordinate piane di un estremo, è applicabile, in coordinate geodetiche rettangolari, entro l'approssimazione di 0".01, al caso di una geodetica di lunghezza non eccedente 64000 m., purchè la variazione dell'azimut non superi 5'.

II.

• Si suppongano dati n punti $A_1 A_2 \dots A_n$ per mezzo delle loro coordinate geodetiche rettangolari $X_1 Y_1, X_2 Y_2, \dots, X_n Y_n$ e si voglia determinare la posizione di un altro punto P , situato in tale prossimità dell'origine che le sue coordinate si possano considerare come piane, con sole misure angolari effettuate nel punto stesso P .

• Si indichi con (ij) l'angolo misurato fra le due sezioni normali, o ciò che è lo stesso (per uno dei teoremi fondamentali della Geodesia pratica) fra le due geodetiche che da P vanno ai punti $A_i A_j$; con (PA_i) (PA_j) gli azimut in P delle geodetiche stesse. — Partendo da tre punti qualunque, fra cui si sono misurati due angoli, con un'applicazione semplice del problema di Pothenot, e considerando le coordinate come piane, si potranno determinare dei valori approssimati $X_o Y_o$ per le coordinate di P ; e col mezzo di queste, facendo uso delle formole 2), si calcoleranno dei valori prossimi $(PA_i)_o$ $(PA_j)_o$ degli azimut come pure dei valori prossimi $s_i s_j$ delle distanze $PA_i PA_j$. Se si indicano con $x y$ le correzioni più convenienti delle coordinate $X_o Y_o$, le correzioni più convenienti degli azimut, per la 4), saranno date dalle equazioni:

$$(PA_i) - (PA_i)_o = -\frac{\cos (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} x + \frac{\text{sen } (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} y$$

$$(PA_j) - (PA_j)_o = -\frac{\cos (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} x + \frac{\text{sen } (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} y.$$

• Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene:

$$(ij) - (ij)_o = \left\{ \frac{\cos (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} - \frac{\cos (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} \right\} x + \left\{ \frac{\text{sen } (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} - \frac{\text{sen } (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} \right\} y$$

dove con $(ij)_o$ s'intende l'angolo $A_i P_o A_j$ cioè il valore prossimo calcolato dell'angolo (ij) . — Se al posto di (ij) si sostituisce il valore per esso osservato, e si fanno le posizioni:

$$5) \left\{ \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\cos (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} - \frac{\cos (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} \\ b_{ij} &= \frac{\text{sen } (PA_j)_o}{s_j \text{ sen } 1''} - \frac{\text{sen } (PA_i)_o}{s_i \text{ sen } 1''} \\ c_{ij} &= (ij)_o - (ij), \end{aligned} \right.$$

si otterrà l'equazione generata:

$$a_{ij} x + b_{ij} y + c_{ij} = v_{ij},$$

ed in modo analogo si otterranno tante equazioni quanti sono gli angoli misurati in P, le quali si risolveranno coi soliti procedimenti della teoria dei Minimi Quadrati.

III.

* Dall'Istituto Geografico Militare mi furono gentilmente forniti i seguenti dati (1), relativi a sette punti trigonometrici visibili dalla specola geodetica della Scuola degli Ingegneri a S. Pietro in Vincoli.

ORIGINE — *Osservatorio Nuovo del Collegio Romano*
(Asse del tetto mobile principale o dell'equatoriale).

NOME DEL PUNTO GEODETICO E LINEA DI COLLIMAZIONE DEL MEDESIMO	AZIMUT DA NORD VERSO EST	DISTANZA METRI
A ₁ — S. Pietro in Vaticano — Asse lucernario della cupola.	279° 35' 50".33	2232.67
A ₂ — Monte Mario — Asse segnale costruito entro il forte.	320.58.42.13	3659.15
A ₃ — Casino Aurora — Asse della torretta, parte più alta del fabbricato.	33.02.50.34	1116.93
A ₄ — Monte Gennaro — Asse segnale piramidale in muratura.	56.19.23.93	32495.02
A ₅ — Monte Cavo — Asse campaniletto della chiesa . . .	130.32.18.48	25122.39
A ₆ — Capo di Bove — Asse segnale in legno sopra gli avanzi d'antico monumento	146.17.51.93	6706.64
A ₇ — Campidoglio — Asse torre municipale	154.48.18.24	712.25

* Coll'aiuto di questi dati, ed applicando le formole 1) per il 4° e 5° punto, e le formole semplici $X = s \sin \alpha$, $Y = s \cos \alpha$ per gli altri quattro, si calcolarono le coordinate geodetiche rettangolari seguenti:

	X	Y
A ₁ — S. Pietro in Vaticano	— 2201.32 ^m	372.24 ^m
A ₂ — Monte Mario	— 2303.85	2842.82
A ₃ — Casino Aurora	609.10	936.23
A ₄ — Monte Gennaro	27041.66	18018.79
A ₅ — Monte Cavo	19092.24	— 16328.56
A ₆ — Capo di Bove	3721.36	— 5579.47
A ₇ — Campidoglio	303.20	— 644.49

* Le direzioni ai primi sei punti vennero determinate nella seconda metà del novembre 1892, in una serie di giornate molto belle, a causa di dominante tramontana, facendo uso del teodolite Starke n. 338 appartenente al gabinetto di Geometria Pratica. Il settimo punto (Campidoglio) venne escluso

(1) Qualcuno di questi elementi potrà subire qualche lieve modificazione in seguito alla compensazione della rete di 1° ordine.

a causa dell'incertezza del puntamento, essendo l'asse della torre non da altro individuato che dalla testa della statua sovrapposta, la quale appariva di dimensioni troppo grandi per la soverchia vicinanza. Le direzioni ai tre punti S. Pietro, Casino Aurora, Capo di Bove vennero determinate col metodo *a strati* girando il cerchio azimutale di 30° in 30° e per ogni posizione del cerchio facendo le due letture coniugate (l'una col cannocchiale a destra, l'altra col cannocchiale a sinistra). — La direzione del segnale di M. Mario, nascosto in gran parte dai cipressi della villa Mellini, venne determinata puntando la luce di un elioscopio centrato sul segnale. — Anche sul campaniletto di Monte Cavo, e precisamente sul pilastro prospettante Roma, venne installato un elioscopio del cui servizio volle con squisita gentilezza e con grande premura incaricarsi il sig. Astasio Lucchesi, direttore dell'Osservatorio meteorologico quivi recentemente istituito. Egli mi fornì anche gli elementi per la riduzione in centro, per effetto della quale tutte le direzioni osservate su Monte Cavo dovettero esser diminuite di 3".0. — Il segnale piramidale di Monte Gennaro, spiccante sul fondo del cielo, si potè puntare benissimo senza il sussidio dell'elioscopio.

• I risultati di queste osservazioni sono raccolti nel seguente specchio, nel quale la direzione a S. Pietro in Vaticano è assunta come direzione origine.

Lembo del cerchio	Posizione del cannocch.	S. PIETRO (direzione origine)	M. MARIO (12)	CAS. AURORA (13)	M. GENNARO (14)	M. CAVO (15)	CAPO DI BOVE (16)
0°	D	0.00.00.0	29.07.56.1	56.31.41.9	128.11.56.4	204.57.51.1	225.57.17.6
	S	00.0	53.4	43.0	56.2	52.4	18.1
30°	D	00.0	54.7	45.6	57.0	53.9	18.5
	S	00.0	53.3	49.4	55.3	51.0	18.6
60°	D	00.0	52.8	44.7	56.8	55.1	20.5
	S	00.0	55.8	42.9	58.9	51.2	18.4
90°	D	00.0	53.2	43.4	59.0	53.3	19.0
	S	00.0	54.0	43.4	58.2	53.9	23.5
120°	D	00.0	54.9	48.5	57.8	51.3	21.1
	S	00.0	52.2	49.6	56.3	50.4	17.1
150°	D	00.0	54.5	45.3	55.0	55.3	17.5
	S	00.0	54.0	47.2	58.3	51.7	21.6

• Da questi dati si dedussero colla media i seguenti valori degli angoli

(12) = 29°.07'.54".08 (15) = 204°.57'.52".55

(13) = 56°.31'.45".41 (16) = 225°.57'.19".29

(14) = 128°.11'.57".10

• Partendo dalle coordinate dei tre punti S. Pietro, Casino Aurora e Capo di Bove, e risolvendo il problema di Pothenot, si determinarono i se-

guenti valori prossimi per le coordinate del centro di stazione (pilastrino della specola)

$$X_o = 1080^m.94 \qquad Y_o = -581^m.24.$$

Coll'aiuto di queste, e facendo uso delle 2), si ottennero i seguenti valori prossimi degli azimut (1):

$$\begin{aligned} (PA_1)_o &= 286^{\circ}.11'.53''.93 & (PA_4)_o &= 54^{\circ}.22'.47''.26 \\ (PA_2)_o &= 315.19.49.64 & (PA_5)_o &= 131.09.47.44 \\ (PA_3)_o &= 342.43.39.04 & (PA_6)_o &= 152.09.13.69 \end{aligned}$$

e da questi si dedussero per sottrazione i seguenti valori prossimi degli angoli:

$$\begin{aligned} (12)_o &= 29^{\circ}.07'.55''.71 & (15)_o &= 204^{\circ}.57'.53''.51 \\ (13)_o &= 56.31.45.11 & (16)_o &= 225.57.19.76 \\ (14)_o &= 128.10.53.33 \end{aligned}$$

« Introducendo tutti questi valori nelle espressioni 5) dei coefficienti, si ottennero le seguenti equazioni generate:

$$\begin{aligned} -13.6x + 27.8y + 1.63 &= v_1 \\ -107.2x + 19.3y - 0.30 &= v_2 \\ 13.0x + 63.2y - 3.77 &= v_3 \\ 22.5x + 64.4y + 0.96 &= v_4 \\ 49.1x + 74.9y + 0.47 &= v_5 \end{aligned}$$

alle quali corrispondono le due equazioni normali:

$$\begin{aligned} 14762x + 3501.1y + 5.66 &= 0 \\ 3501x + 14896.9y - 101.74 &= 0. \end{aligned}$$

La loro risoluzione conduce ai seguenti valori delle incognite:

$$x = -0^m.002 \qquad y = 0^m.007,$$

epperò i valori definitivi delle coordinate della specola (asse del pilastrino) saranno:

$$X = 1080^m.94 \qquad Y = -581^m.23.$$

« La piccolezza delle precedenti correzioni, dovute alla introduzione di tre nuovi punti trigonometrici, oltre al dimostrare la esattezza degli elementi forniti dall'Istituto Geografico, è ancora una prova della bontà delle osservazioni (2).

(1) Per effettuare questo calcolo conviene porre le 2) sotto la forma:

$$\begin{aligned} -\log s \operatorname{sen} \alpha &= \log (X_i - X_o) + [0.84623] \frac{(Y_i - Y_o)^2}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} \\ \log s \operatorname{cos} \alpha &= \log (Y_i - Y_o) - [1.14726] \frac{(X_i - X_o)^2}{2\rho N \operatorname{sen} 1''} \end{aligned}$$

perchè allora i secondi termini danno le correzioni da farsi a $\log (X_i - X_o)$ e $\log (Y_i - Y_o)$, espresse in unita della settima cifra decimale logaritmica.

(2) Questo risultato, certamente impreveduto, mi indusse a rifare il calcolo delle coordinate XY, basandomi sugli altri tre punti Monte Mario, Monte Gennaro, Monte Cavo: il risultato fu

$$X = 1080^m.99 \qquad Y = -581^m.23.$$

IV.

* Dalla specola P non è visibile lo strumento dei passaggi S, situato nel giardino annesso alla Scuola degli Ingegneri, e mediante il quale venne determinata la latitudine. Per collegare i due punti si scelsero altri due punti intermedi AB sul tetto della Scuola, in ognuno dei quali si fece stazione. I risultati di queste operazioni sono qui riassunti:

Triangolo PAB

	Angoli misurati	Angoli compensati
in A	53°.32'.50"	53°.32'.53"
" B	67.09.58	67.10.00
" P	59.17.04	59.17.07

Triangolo SAB

Angolo misurato in A	85°.21'.50"
" " B	63.16.16
Azimut del lato PA	= 73°.23'.56"

* La lunghezza dello stesso lato PA venne determinata dall'ing. Grismayer, assistente alla cattedra di Geometria Pratica, facendo uso di un Cleps Salmoiraghi, e, come medio di 28 successive misure, si ottenne:

$$PA = 49^m.83.$$

Risolvendo con questa base il sistema dei due triangoli, si trova:

$$\begin{aligned} \text{distanza Specola-strumento} &= 121^m.80 \\ \text{azimut} &= 98°.53'.21'' \end{aligned}$$

epperò, indicando con X_s , Y_s le coordinate dello strumento (asse verticale), si ha:

$$X_s = 1201^m.29 \qquad Y_s = -600^m.05$$

* Di qui si ricava:

Differenza di latitudine Specola — Strumento = 0".610 (Spec. al N).

* La latitudine dello strumento nel 1887 venne trovata = 41°.53'.34".42, quindi si ha:

latitudine astronomica della specola = 41°.53'.35".03 (1887).

* I dati precedenti conducono ancora ai seguenti risultati:

Differenza di longitudine Specola — M. Mario = 2'.26".85 = 9".79 (Specola all'est).

Differenza di latitudine Specola — Monte Mario = 1'.50".99 (Specola al sud).

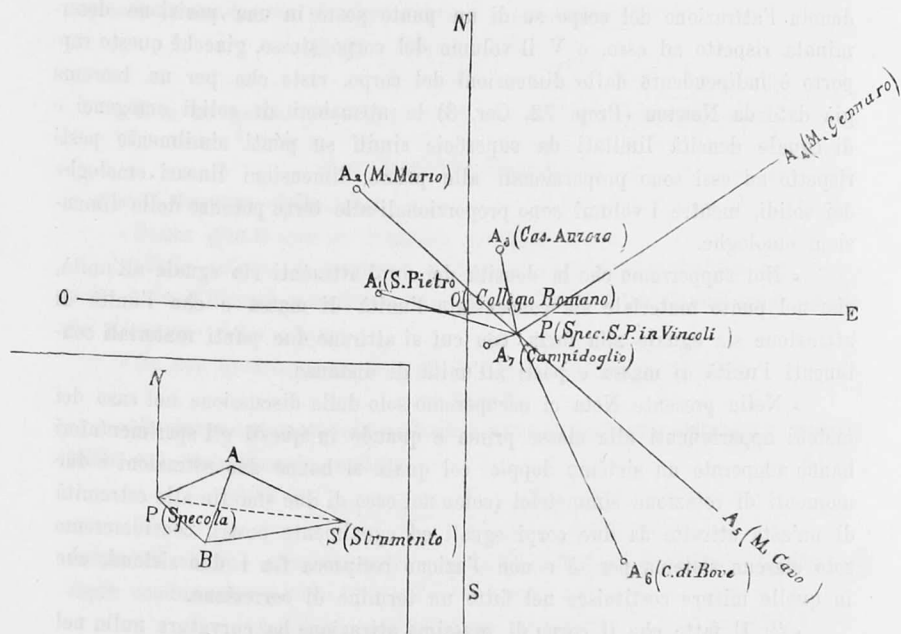
Differenza di latitudine Specola — Coll. Rom. (equatoriale) = 18".84
(Specola al sud).

Differenza di latitudine Specola — Campidoglio (torre) = 2".05
(Specola al nord).

« La latitudine del circolo meridiano del Campidoglio, determinata dal prof. Respighi nel 1875 ha il valore $41^{\circ}.53'.33''.69$ (1), e la sua riduzione all'asse della Torre capitolina è $dg = 0''.41$ (Torre al sud). La latitudine del circolo meridiano del Collegio Romano, determinata dal prof. Millosevich nel 1886 è $= 41^{\circ}.53'.53''.58$ (2), e la sua riduzione all'asse dell'equatoriale, come mi risulta da una gentile comunicazione dello stesso Professore, è $dg = 0''.54$ (equatoriale al nord). Si ha quindi:

latitudine Respighi ridotta alla Specola = $41^{\circ}.53'.35''.33$ (1875)

 " Millosevich " " " = $41.53.35.28$ (1886) *.



(1) *Catalogo delle declinazioni medie pel 1875.0 di 1463 stelle ecc.* Memorie della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXVII (1879-80).

(2) *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Collegio Romano.* Annali della Meteorologia italiana, parte 3^a, 1885; e Memorie della Società degli spettroscopisti italiani, Vol. XV, 1886.