ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

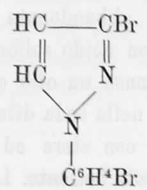
1893

« Ossia in 100 parti:

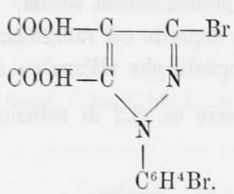
	trovato	calcolato per $C^9H^6Br^2N^2$
Br.	53,12	52,98

« Questo bibromofenilpirrazolo cristallizza in aghetti bianchi setacei insolubili nell'acqua, poco solubili nell'alcool freddo, solubili nell'alcool caldo e nell'etere. Fonde a 74°.

« Il composto se contiene, come è molto probabile, l'atomo di bromo nel nucleo pirrazolico, lo contiene al posto dell'atomo di idrogeno 3, cioè dev'essere rappresentato dallo schema:



derivando dall'acido bicarbossilico bibromurato



Fisico-chimica. — *Sulla questione del potere rifrangente per un raggio d'onda infinita.* Nota del Corrispondente NASINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana.* Nota III di ERNESTO PASCAL, presentata dal Socio CREMONA.

« Nell'ultima Nota ho compiuto lo studio delle terne di coniche contenenti almeno una coppia di 1ª specie. Ho trovato che ne esistono sei diverse, e di ciascuna specie ho indicato le proprietà geometriche.

« In questa nuova Nota mi propongo di completare lo studio di tutte le possibili terne studiando cioè quelle che contengono tutte coppie di 2ª specie.

« Con ciò terminerò quello che dovea comunicare sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla quartica piana, e in prossime Note passerò ad un altro genere di considerazioni.

§ 9. — Gruppo di sostituzioni corrispondenti ad una coppia di 2ª specie.

« Fra le sostituzioni del gruppo che lascia fissa la conica fondamentale

$$a \equiv (12 \,.\, 23 \,.\, 34 \,.\, 41)$$

consideriamo quelle che lasciano anche fissa la conica

$$b' \equiv (13 \,.\, 56 \,.\, 15 \,.\, 36)$$

formante coppia di 2ª specie colla data (v. Nota I).

« L'ordine del gruppo corrispondente sarà al solito $\frac{9.8.8.8}{144} = 32$ e se vogliamo anche quelle sostituzioni che scambiano fra loro le due coniche si avrà invece un gruppo di ordine 64.

« Se la retta (13) deve restar fissa, allora le sostituzioni si riducono $\frac{32}{4} = 8$, e infatti sappiamo (v. Nota I) che allora esse si riducono a sole permutazioni di punti (perchè allora, dovendo restar fissa la seconda conica, i sistemi d'imprimitività relativi alla prima conica, non possono più scambiarsi fra loro), e sono propriamente le 8 sostituzioni formate cogli scambî dei punti

2 con 4
5 con 6
7 con 8.

« I quadri dei sistemi d'imprimitività relativi alle due coniche sono i seguenti:

$$a. \left\{ \begin{array}{l} 13.24, 56.78, 57.68, 58.67 \\ 15.35, 16.36, 17.37, 18.38 \\ 25.45, 26.46, 27.47, 28.48 \end{array} \right. \qquad b'. \left\{ \begin{array}{l} 12.62, 14.64, 17.67, 18.68 \\ 32.52, 34.54, 37.57, 38.58 \\ 16.35, 24.78, 27.48, 28.47 \end{array} \right.$$

« Se le due coniche debbono restar fisse, si riconosce subito che debbono restar fissi i terzi sistemi di ciascuno di questi due quadri, e quindi le quattro rette che essi hanno in comune, cioè la conica rappresentata da

$$c' \equiv (27 \,.\, 47 \,.\, 28 \,.\, 48).$$

« Possiamo dunque dire:

« Anche una coppia di 2ª specie individua un'altra conica esterna, che « possiamo anche chiamar *coniugata* alla coppia. Questa terza conica c' forma

« coppie di 1^a specie con ciascuna delle date, ed è l'unica dotata di questa « proprietà ».

« La dimostrazione di questa ultima parte del teorema risulta dalla semplice considerazione dei due quadri di sopra, donde si vede che il 2° quadro separa sempre in due linee diverse due rette formanti coppie nel 1° quadro, eccetto per le quattro rette di c'.

« Dalla stessa considerazione di sopra risulta anche che resterà fisso l'assieme delle due coniche

$$(25 . 45 . 26 . 46) \qquad (16 . 35 . 24 . 78)$$

formanti a loro volta una coppia di 2^a specie; dunque:

« Ad ogni coppia di 2^a specie ne è correlata un'altra esterna, ciascuna « delle cui coniche forma coppia di 1^a specie colla prima delle date, e di « 2^a specie coll'altra, o viceversa ».

« Se alla coppia a, b' aggiungiamo la conica c' abbiamo una terna contenente due coppie di 1^a specie e una di 2^a, e questa l'abbiamo già studiata nella Nota II.

« Dai risultati della stessa Nota può risultare che rispetto alla coppia a, b' le coniche esterne formanti coppia di 2^a specie con una delle date, e di 1^a specie coll'altra, debbono separarsi in tre categorie distinte, le quali daranno poi luogo alle tre terne considerate nel § 7 della citata Nota.

« Effettivamente questo lo possiamo trovare, e per ciò fare cominciamo coll'osservare che il gruppo che lascia fissa la coppia di 2^a specie data, separa, come risulta dalle cose dette, le altre 20 tangenti doppie in $4 + 8 + 8$ in modo che ci sia la transitività in ciascuna di queste classi.

« Nel nostro caso questi tre sistemi sono rappresentati da

I.	27 . 47 . 28 . 48
II.	25 . 45 . 26 . 46 . 16 . 35 . 24 . 78
III	57 . 68 . 58 . 67 . 17 . 37 . 18 . 38

e si riconosce subito in che maniera le rette di ciascuno di questi sistemi compariscono nei due quadri a, b'.

« Le coniche che formano allora coppia di 1^a specie con una sola delle date si separano effettivamente in tre categorie distinte, e sono rappresentate da:

1)	(27 . 47 . 25 . 45)	in numero di	8
2)	(25 . 45 . 26 . 46)	»	2
3)	(57 . 68 . 58 . 67)	»	4

« Resta a considerare quelle formanti coppia di 2^a specie con ciascuna delle date.

« Tenendo presenti i tre sistemi stabiliti sopra si vede subito che non si possono formare più che quattro categorie di coniche da reputarsi fra loro distinte, e sono rappresentate da:

1)	$c_6 \equiv (24.35.68.17)$	in numero di	16
2)	$c_7 \equiv (24.45.57.27)$	"	16
3)	$c_8 \equiv (57.58.17.18)$	"	4
4)	$c_9 \equiv (57.58.27.28)$	"	8.

« Possiamo conchiudere:

« Il gruppo che lascia fissa una coppia di 2ª specie separa le 59 coni-« che *esterne* in $1+8+2+4+16+16+4+8=59$, in cui le ul-« time quattro categorie sono formate di coniche che costituiscono coppie di « 2ª specie con ciascuna delle date ».

§ 10. — Terne contenenti tutte coppie di 2ª specie.

« Dal paragrafo precedente risulterebbe a prima vista che esistono *quattro* specie di terne contenenti coppie di 2ª specie; noi però faremo vedere che la terna $a\,b'\,c_9$ non è sostanzialmente diversa dalla a, b', c_6.

« Propriamente, la terna $a\,b'\,c_6$, pure avendo tutte le sue coppie di 2ª specie e quindi fra loro equivalenti, non è però simmetrica nelle sue tre coniche, ma la prima conica a vi comparisce in modo diverso che le altre due.

« L'altra terna $a\,b'\,c_9$ è simile alla precedente, ma solo ci si presenta da un altro lato, cioè in essa la c_9 fa lo stesso ufficio che la a facea nella prima.

« Chiaramente avremo ciò dimostrato se avremo fatto vedere che la formazione di a rispetto ai sistemi che si costituiscono (in modo analogo a quelli I II III studiati nel § 9) relativamente alla coppia di 2ª specie $b'\,c_9$, è la stessa della formazione di c_6 relativamente ai sistemi I II III del § 9.

« Ora ciò risulta immediatamente perchè i sistemi I II III relativi alla coppia $b'\,c_9$ sono

I'.	17.18.67.68
II'.	37.38.47.48.12.62.14.64
III'.	23.25.34.54.16.35.24.78

e si vede che a risulta con due rette di II' e due rette di III', nello stesso modo come c_6 risultava formato con due rette di II e due di III.

« Possiamo dunque dire:

« Esistono solo tre terne di coniche con tutte coppie di 2ª specie. La « prima di queste ci si presenta assai singolare come quella che pure avendo « tutte le coppie della medesima specie, non è però composta simmetrica-« mente colle sue tre coniche ».

« Vedremo poi con quale proprietà geometrica ci si appalesa questa dissimmetria.

« Studiando in seguito le quadriche coordinate alla sestica storta, troveremo che un fatto analogo si ricomincia ad appalesare anche prima, cioè esistono *coppie* non simmetriche di tali quadriche.

« Possiamo intanto aggiungere:

« Chiamando terne di 7ª 8ª 9ª specie le terne

$$« \; a \; b' \; c_6 \,, \qquad a \; b' \; c_7 \,, \qquad a \; b' \; c_8$$

« si ha che esistono

$$« \; \frac{315.72.16}{2} = 181440 \text{ terne di } 7^a \text{ specie}$$

$$« \; \frac{315.72.16}{3} = 120960 \quad » \quad 8^a \text{ specie}$$

$$« \; \frac{315.72.4}{3} = 30240 \quad » \quad 9^a \text{ specie } ».$$

§ 11. — Proprietà delle tre ultime terne di coniche.

« Abbiamo visto che ad ogni coppia di 2ª specie è coniugata una conica esterna. In ciascuna delle tre ultime terne troviamo allora le coniche coniugate alle tre coppie di coniche contenutevi, e vediamo quali proprietà otteniamo.

« Nella terna a, b' c_6 cioè

$$(12\,.\,23\,.\,34\,.\,41)\,,\;(13\,.\,56\,.\,15\,.\,36),\;(24\,.\,35\,.\,68\,.\,17)$$

le tre coniche coniugate sono rispettivamente

$$\begin{array}{llll}
(23\,.\,25\,.\,34\,.\,45) & \text{coniugata alla coppia} & & b'\;c_6 \\
(26\,.\,46\,.\,28\,.\,48) & » \qquad » & » & c_6\;a \\
(27\,.\,47\,.\,28\,.\,48) & » \qquad » & » & a\;b'.
\end{array}$$

« Si vede che la prima di esse taglia in 4 punti (sulla curva di 4° ordine) la conica a, mentre le altre due non tagliano più nessuna delle coniche date e si tagliano fra loro anche in 4 punti. Di qui si vede daccapo che nella terna di 7ª specie, una delle tre coniche comparisce in modo diverso che le altre due.

« Possiamo dire:

« Nella terna di 7ª specie vi è une sola conica speciale, caratterizzata dalla « proprietà che taglia in 4 punti (sulla curva di 4° ordine) la conica coniu- « gata alla coppia delle altre due.

« Le altre due coniche coniugate si tagliano poi fra loro in 4 punti « sulla curva di 4° ordine, e sono esterne alla prima ».

« Nella terna a, b', c_7 le tre coniche coniugate sono

$$\begin{array}{llll} (14\,.\,17\,.\,64\,.\,67) & \text{coniugata alla coppia} & & b'\,c_7 \\ (16\,.\,36\,.\,18\,.\,38) & \;\;\text{"} \quad\;\; \text{"} \quad \text{"} & & c_7\,a \\ (27\,.\,47\,.\,28\,.\,48) & \;\;\text{"} \quad\;\; \text{"} \quad \text{"} & & a\,b' \end{array}$$

e si vede che ognuna di queste incontra in due soli punti la conica opposta della terna data.

« Inoltre quelle tre coniche formano una terna della medesima specie della data, giacchè intanto si può verificare che tutte le loro coppie sono di 2ª specie, e inoltre costruendo poi daccapo le coniche coniugate alle sue coppie si ritorna alla terna primitiva ([1]), cioè si giunge a tre coniche che hanno colla seconda terna la stessa relazione che quelle della seconda terna hanno colla prima terna.

« Ora siccome le tre coniche coniugate ad una terna di 7ª, 9ª specie, non hanno (come faremo vedere per le terne di 9ª specie, e come abbiamo già fatto vedere per quelle di 7ª specie) una relazione di tal natura colla terna primitiva, così possiamo asserire che le tre coniche ultimamente trovate formano una terna anche di 8ª specie.

« Le tre coniche coniugate ad una terna di 8ª specie, formano a loro « volta una terna della medesima specie, dalla quale poi col medesimo pro- « cedimento si torna alla terna primitiva. Ogni conica di questa nuova terna « incontra in soli due punti una sola delle coniche della terna primitiva ».

« Finalmente per la terna di 9ª specie a, b' c_8 è facile riconoscere che le tre coniche coniugate coincidono; onde:

« La terna di 9ª specie è caratterizzata dalla proprietà che le sue coniche « coniugate coincidono; essa è cioè formata in modo che tutte le sue coppie « hanno la medesima conica coniugata ».

§ 12. — Altre proprietà geometriche delle tre terne contenenti tutte coppie di 2ª specie.

« Possiamo fare per queste tre ultime terne delle ricerche analoghe a quelle eseguite nella Nota II, esaminando il numero e la natura delle coniche che intersecano le tre della terna.

« Per la terna di 7ª specie esistono quattro sole coniche (12 . 34 . 13 . 24), (12 . 23 . 15 . 35), (23 . 14 . 13 . 24), (34 . 14 . 15 . 53) intersecanti in 4 punti la conica a, e in due punti le altre due, ed esistono poi 16 coniche come p. es.

(12 . 13 . 35 . 25), (12 . 15 . 24 . 54), ecc.

intersecanti in due soli punti ciascuna delle tre date; onde:

[1] Tutte queste verifiche si fanno assai agevolmente costruendo il quadro dei sistemi d'imprimitività relativi alle tre coniche.

« Nella terna di 7^a specie chiamando *conica principale* quella che in « essa comparisce in modo diverso che le altre due, possiamo dire che esi« stono 4 sole coniche intersecanti in 4 punti la conica principale, e in due « punti (sulla curva di 4° ordine) le altre due; ed esistono invece 16 coni« che intersecanti in soli 2 punti ciascuna delle date ».

« Per la terna di 8^a specie invece troviamo:

« Esistono 6 coniche intersecanti in 4 punti una delle date di una terna « di 8^a specie, e in 2 punti le altre due, ed esistono 16 altre coniche inter« secanti poi in soli due punti ciascuna di quelle di una terna di 8^a specie ».

« Finalmente per la terna di 9^a specie si trova che si possono formare 16 coniche come

$$(12 \,.\, 15 \,.\, 57 \,.\, 27), \quad (23 \,.\, 56 \,.\, 17 \,.\, 48), \text{ ecc.}$$

le quali intersecano in 2 punti ciascuna delle tre date, e queste passano sempre per i punti di contatto delle tangenti doppie 27 . 28 . 47 . 48, che corrispondono precisamente alla conica coniugata alla terna di 9^a specie (v. § 11).

« Onde possiamo raccogliere questa proprietà:

« Non esistono coniche che taglino in 4 punti una di quelle di una « terna di 9^a specie, e in 2 punti le altre; esistono invece 16 coniche inter« secanti in 2 punti ciascuna di quelle della terna di 9^a specie, e ognuna « di queste 16 coniche taglia poi a sua volta in 2 punti (si intende sempre « sulla curva del 4° ordine) la conica coniugata alla terna data ».

« Prima di terminare vogliamo fare alcune altre osservazioni finali. È chiaro che l'ordine massimo di un assieme di coniche esterne l'una all'altra è 7, e noi potremmo proporci di ricercare tutte le diverse specie di assiemi di sette coniche esterne fra loro. Fra questi se ne presenta uno contenente tutte coppie di 1^a specie, e tale che due delle coniche che contiene ne determinano sempre una terza; l'equazione cioè di tali sette coniche avrà carattere *ternario*. Un tal sistema si ottiene aggiungendo ad una terna *fondamentale* (Nota II) le quattro coniche che formano coppia di prima specie con ciascuna di quelle date.

« Il Noether in uno studio sull'equazione generale di 8° grado e le sue risolventi (Math. Ann. v. 15, p. 89) considerò dei sistemi formati in maniera speciale mediante le radici dell'equazione di 8° grado, e che corrispondono esattamente (interpretati sulla curva del 4° ordine, come fa il Noether nel § 8 del suo lavoro) a questi speciali sistemi di sette coniche, di cui abbiamo parlato.

« Il Noether trova che di essi ve ne sono 135 (1). Nel medesimo lavoro il Noether ha anche occasione (2) di considerare le *due* specie di coppie di coniche da noi studiate nella Nota I, di cui abbiamo in dettaglio sviluppate le proprietà geometriche che le caratterizzano, e che ci sono servite come necessaria preparazione per lo studio delle terne fatto nella II e III Nota ».

(1) Ibid. p. 108. -- (2) Ibid. p. 92.