ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

Fisica. — *A proposito della discussione sulla forma più opportuna da darsi al corpo attraente nella misura della densità media della terra e sul corpo di massima attrazione ad un punto.* Nota del dott. A. Sella, presentata dal Socio Blaserna.

« 1. I metodi di misura della densità media della terra, che qui consideriamo, si possono dividere in due classi:

« I. *Metodi, in cui importa la conoscenza dell'attrazione del corpo attraente su di un sol punto materiale.*

« II. *Metodi, in cui importa la conoscenza dell'attrazione del corpo attraente su due punti materiali.*

« Alla classe prima appartengono i metodi di Cavendish (Baily, Reich, Cornu), Vilsing (Laska), Jolly (Poynting, Mayer); alla seconda il metodo proposto da Keller (König e Richarz).

« Per discutere il vantaggio relativo che presentano le diverse forme da darsi al corpo attraente serve conoscere il rapporto $\lambda = A/V^{1/3}$, in cui A denota l'attrazione del corpo su di un punto posto in una posizione determinata rispetto ad esso, e V il volume del corpo stesso, giacchè questo rapporto è indipendente dalle dimensioni del corpo, visto che per un teorema già dato da Newton (Prop. 72, Cor. 3) le attrazioni di solidi omogenei e di eguale densità limitati da superficie simili su punti similmente posti rispetto ad essi sono proporzionali alle prime dimensioni lineari omologhe dei solidi, mentre i volumi sono proporzionali alle terze potenze delle dimensioni omologhe.

« Noi supporremo che la densità dei corpi attraenti sia eguale all'unità, che nel punto materiale sia concentrata l'unità di massa e che l'unità di attrazione sia eguale alla forza, con cui si attirano due punti materiali contenenti l'unità di massa e posti all'unità di distanza.

« Nella presente Nota ci occuperemo solo della discussione nel caso dei metodi appartenenti alla classe prima e quando in questi gli sperimentatori hanno adoperato un sistema doppio, col quale si hanno due attrazioni e due momenti di rotazione simmetrici (come nel caso di due sferette alle estremità di un'asta attratte da due corpi eguali ed egualmente posti), considereremo solo ciascun sistema per sè e non l'azione reciproca fra i due sistemi, che in quelle misure costituisce nel fatto un termine di correzione.

« 2. Il fatto che il corpo di massima attrazione ha curvatura nulla nel polo principale, ove risiede il punto attratto, lascia credere che l'essere la superficie limitante il corpo attraente coincidente nei pressi del punto attratto con un piano costituisca una circostanza favorevole per rendere possibilmente alto il valore di λ.

« Si consideri così una calotta sferica, in cui il punto attratto O si trovi nel centro della base. Se h è l'altezza, ϱ il raggio della base, si tratta di

trovare in che rapporto devono stare h e ϱ, affinchè l'attrazione della calotta su di O, restando costante il volume, diventi un massimo.

« Perciò espressi A e V in funzioni di h e di ϱ, si dovrà soddisfare all'equazione:

$$\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial V}{\partial \varrho} - \frac{\partial A}{\partial \varrho}\frac{\partial V}{\partial h} = 0.$$

« Ponendo l'origine delle coordinate nel punto attratto, l'asse delle x nell'asse di rivoluzione, si ha:

$$A = 2\pi \int_0^h \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\,, \qquad x^2 + y^2 = \frac{h\varrho^2 + (h^2 - \varrho^2)x}{h}\,,$$

da cui si ricava:

$$A = \frac{2\pi h}{3}\,\frac{h^2 + 2h\varrho + 3\varrho^2}{(h+\varrho)^2}\,.$$

D'altra parte vale:

$$V = \frac{\pi}{2.3}\,h\,(h^2 + 3\varrho^2)$$

e quindi la condizione di sopra conduce all'equazione:

$$\frac{h\varrho\,(h^2+\varrho^2)\,(h-3\varrho)}{(h+\varrho)^3} = 0.$$

« E si ha quindi per unica soluzione, che fa al presente caso:

$$h = 3\varrho \text{ ovvero } h = \frac{9}{10}\,d\,,$$

se d è il diametro della sfera.

« Siamo giunti così al semplice risultato:

« *Nella calotta di massima attrazione col punto attratto nel centro della base, l'altezza vale tre volte il raggio della base ovvero nove decimi del diametro della sfera.*

« Se con questo valore trovato di h/ϱ si calcola λ, si trova:

$$\lambda = 2{,}65603.$$

« Se invece il punto attratto fosse nel vertice della calotta, si calcolerebbe con procedimento analogo:

$$A = 2\pi\left(h - \frac{2}{3}\,\frac{h^2}{\sqrt{h^2+\varrho^2}}\right),$$

mentre il volume serba la stessa espressione di prima. E la condizione di sopra condurrebbe a:

$$\frac{h\varrho\,[3(h^2+\varrho^2)^{3/2} - 3h^3 - 5h\varrho^2]}{(h^2+\varrho^2)^{3/2}} = 0.$$

« Il termine fra parentesi quadre al numeratore reso razionale e liberato dal fattore ϱ^2 fornisce l'equazione:

$$3h^4 - 2h^2\varrho^2 - 9\varrho^4 = 0,$$

da cui si ottiene come valore accettabile:

$$h^2 = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}\,\varrho^2.$$

Con questo si calcola finalmente:

$$\lambda = 2{,}61733.$$

« 3. Non sarà inutile per il paragone dei diversi valori di λ il raccogliere nella seguente tabella i valori di λ disposti per ordine decrescente per diversi corpi, per cui si conoscano le condizioni di attrazione massima, aggiungendo anche corpi attraenti di forma definita, come la sfera, il cubo, il corpo di massima attrazione stesso.

Corpo attraente	Punto attratto	λ	
Corpo di massima attrazione	Polo principale	2,66604	Playfair (1)
Calotta sferica	Centro della base	2,65603	Sella
Ellissoide di riv. schiacciato	Polo	2,6558	Lampe (2)
Corpo di massima attrazione	Secondo polo	2,6321	Sella (3)
Ellissoide di riv. allungato	Equatore	2,6200	Lampe (4)
Calotta sferica	Vertice	2,61733	Sella
Cilindro retto	Centro della base	2,61624	Lampe (2), Keller (5)
Prisma esagonale retto	»	2,61335	Keller (5)
Prisma quadrato retto	»	2,59928	Keller (5)
Sfera	Punto alla superficie	2,59852	Newton
Cubo	Centro di una faccia	2,59690	Keller (6)
Prisma triangolare retto	Centro della base	2,54823	Keller (5)
Settore sferico	Vertice	2,53925	Keller (7)
Calotta paraboloidica	Vertice	2,5390	Sella (8)
Cubo	Punto medio di uno spigolo	2,19443	Keller (6)
Cono	Vertice	2,15525	Playfair (1), Lampe (2)
Cubo	Vertice	1,67903	Keller (6)

Playfair e Lampe hanno paragonato l'attrazione del corpo in questione coll'attrazione di una sfera di egual volume; per dedurne λ basta moltiplicare quel rapporto per $4^{2/3}\pi^{2/3}/3^{2/3}$.

(1) Playfair, *Of the solids of greatest attraction, or those which among all the solids that have certain properties, attract with the greatest force in a given direction*, 1807. Pubblicato nelle « Transactions of the Royal Society of Edimburgh ». Vol. VI, Part. II, 1809.

(2) Lampe, *Einige Zahlenbeispiele für die Anziehung, welche eine homogene Masse auf einen materiellen Punkt nach dem Newton'schen Gesetz ausübt.* Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin im Jahre 1884, p. 46. Il valore di λ per l'ellissoide schiacciato col punto attratto al polo fu calcolato erratamente dal Lampe in 2,6560.

(3) Sella, *Sull'attrazione del corpo di massima attrazione al secondo polo.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1892, 1° sem., p. 350.

(4) Lampe, l. c., p. 55.

(5) Keller, *Sul metodo di Jolly per la determinazione della densità media della terra.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1886, 1° sem., p. 145.

(6) Idem., *Ricerche sull'attrazione delle montagne.* Roma, Loescher 1872, Parte 1ª, p. 62.

(7) Idem., *Nachträgliches zur Abhandlung: Vergleichende Uebersicht der verschiedenen Messungsmethoden der mittleren Dichtigkeit der Erde.* Rom und Nürnberg 1892, p. 34.

(8) Le equazioni che regolano il calcolo nel caso del punto attratto nel vertice di una calotta paraboloidica, cioè del paraboloide di rivoluzione limitato da un piano normale all'asse, sono le seguenti:

$$A = 2\pi\left(h - \sqrt{ph + h^2} + p \operatorname{logn} \frac{\sqrt{p+h} + \sqrt{h}}{\sqrt{p}}\right), \quad V = \frac{\pi p h^2}{2}$$

$$\frac{\nu\sqrt{\nu + \nu^2} - \nu^2 + 2\nu}{2\sqrt{\nu + \nu^2}} = \operatorname{logn}\left(\sqrt{\nu} + \sqrt{1+\nu}\right)$$

« Come si vede la calotta sferica col punto attratto nel centro della base viene nella tabella subito dopo il corpo di massima attrazione. Ed è da credersi che una calotta ellissoidica potrebbe esercitare un'attrazione anche maggiore della sferica, perchè oltre all'altezza ed al raggio della base si potrebbe disporre di un terzo parametro, come l'eccentricità dell'ellisse di sezione.

« 3. Dalla tabella di sopra segue pure ad evidenza - come si sapeva - che coll'adottare fra certi limiti piuttosto una forma che l'altra per il corpo attraente nella misura della densità media della terra, c'è ben poco da guadagnare; ma mi preme di fare osservare che nell'esperienza entra in giuoco un altro fattore, la cui importanza è ben maggiore, che non la forma del corpo attraente.

« Intendo di parlare della circostanza che in pratica il corpo attratto non si può considerare come un punto materiale, le cui dimensioni sieno trascurabili rispetto a quelle del corpo attraente.

« Proponiamoci per esempio di determinare il corpo di massima attrazione per una sfera di raggio s, che funziona da corpo attratto.

« Siccome l'azione di una sfera all'esterno può venire sostituita dall'azione della sua massa raccolta nel centro, così il presente problema si riduce all'altro di determinare il corpo di massima attrazione per un punto, quando questo punto sia circondato da una superficie sferica, nel cui interno non può penetrare il corpo attraente.

« Si può allora mostrare che questo sarà il corpo di massima attrazione ordinario passante per il centro della sfera, ma di dimensioni tali, che lo spazio esterno alla sfera sia esattamente riempito dalla materia disponibile.

« Infatti la superficie di rotazione che limita il corpo di massima attrazione ordinario è il luogo dei punti che attirano la sfera nella direzione dell'asse colla *medesima* forza ed essa separa la porzione dello spazio - esterna - in cui un punto materiale attira nella stessa direzione con forza *minore*, da quello - interna - in cui esso attira con forza *maggiore*. Se adesso la forma di questo solido, sempre limitata da una parte da una superficie sferica, viene alterata in un modo qualsiasi si dovrà trasportare dallo spazio interno all'esterno una certa quantità di materia e con ciò l'attrazione totale verrà diminuita. Quindi il solido ora considerato limitato dalla superficie del corpo di massima attrazione per un punto e dalla superficie sferica data è veramente il corpo di massima attrazione per una sfera.

« Determiniamo ora il valore di questa attrazione.

---

in cui h è l'altezza della calotta, p il parametro della parabola generatrice $y^2 = px$ e ν indica il rapporto h/p; l'ultima equazione è soddisfatta da $\nu = 0{,}7570$, che fornisce il valore sopra riportato di λ.

« Sia s il raggio della sfera, a il parametro del corpo di massima attrazione definito dall'equazione $\varrho^2 = a^2 \cos \vartheta$ e sia $\cos \theta = s^2/a^2$, allora:

$$A = 2\pi \int_0^\theta \int_s^\varrho d\varrho \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{5} \pi a - \pi s \frac{5a^4 - s^0}{5a^4},$$

$$V = 2\pi \int_0^\theta \int_s^\varrho \varrho^2 \, d\varrho \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta = \frac{4\pi a^3}{15} - \frac{2\pi s^3}{15a^2} (5a^2 - 3s^2)$$

e ponendo $s/r = \nu$:

$$A = \frac{4\pi a}{5} \left(1 - \frac{5}{4} \nu + \frac{\nu^5}{4}\right), \quad V = \frac{4\pi a^3}{15} \left(1 - \frac{5}{2} \nu^3 + \frac{3\nu^5}{2}\right).$$

« Per calcolare quindi a dato V si dovrebbe risolvere un' equazione del quinto grado. In seconda approssimazione il volume resta lo stesso. Se adesso λ_0 indica il valore di λ per $s = 0$, sarà:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \frac{5}{4} \nu + \frac{\nu^5}{4}}{\left(1 - \frac{5}{2} \nu^3 + \frac{3}{2} \nu^5\right)^{1/3}}$$

e se ν è così piccolo da poterne trascurare le potenze superiori alla seconda:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{5}{4} \nu\right).$$

Se p. e. si facesse $\nu = 1/100$, si avrebbe $\lambda = 2{,}6327$.

« Si vede quindi quanto importi il non essere le dimensioni del corpo attratto trascurabili rispetto a quelle del corpo attraente. A diminuire poi l'effetto contribuisce pure fortemente il fatto che in pratica il corpo attratto non potrà per più ragioni stare ad immediato contatto col corpo attraente.

« 4. Passerò ora a riferire alcuni dati e proprietà del corpo di m. a.

« Il primo [1] che trovò l'equazione della curva meridiana fu il marchese Guillaume Saint-Jacques de Silvabelle (1722-1801) direttore dell'osservatorio astronomico di Marsiglia [2]. Egli dedusse in due modi questa equazione sia col calcolo, sia col semplice ragionamento sintetico, che mostra dover essa rappresentare il luogo dei punti di attrazione costante; ma non calcolò nemmeno l'attrazione del corpo.

« Il Playfair nella Memoria citata probabilmente senza conoscere il lavoro del St. Jacques ripetè quest'ultimo ragionamento, mostrandone tutta la generalità, diede un modo semplice di costruzione grafica della curva meri-

[1] Vedi Lampe, *Eine litterarische Notiz über den Körper grösster Anziehung.* Verhandl. d. phys. Ges. zu Berlin im Jahre 1890, p. 78.

[2] Mémoires de Math. et de Phys., présentés à l'Ac. R. des Sciences par divers Savants. Tome I, Paris 1750.

diana, calcolò l'attrazione paragonandola con quella di una sfera di egual volume e trovò alcune altre proprietà, di cui si dirà in appresso.

« Gauss riferendosi probabilmente a Playfair riportava in una nota nei suoi *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* (1829) il rapporto tra l'attrazione del corpo di m. a., e quella della sfera di egual volume.

« Altri autori che hanno trattato del corpo di m. a., senza però aggiungere nulla di nuovo sono: Schellbach, *Mechan. u. math. Probleme, Progr. des Friedrich-Wilhelms Gymn.* Berlin 1845; *Neue Elemente der Mechanik* e *Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten* (Berlin 1860); Jullien, *Problèmes de Mécanique rationnelle* (1866); Bertrand, *Cours de calcul intégral* (1870); Schell, *Mechanik*; Minchin, *Treatise on statics*; Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal* ecc. ecc.

« Ecco ora le proprietà del corpo di m. a., che ho raccolto:

« Equazione della curva meridiana: $\varrho^2 = a^2 \cos \vartheta$ ovvero $(x^2 + y^2)^{3/2} = a^2 x$ (St. Jacques).

« Attrazione sul polo principale $= \frac{4}{5} \pi a$ (Playfair).

« Attrazione sul secondo polo:

$$2\pi a \left\{ 1 - \frac{3}{2^{3/4}} \frac{1}{3.5.7.9} \left[(492 + 306\sqrt{2}) \sqrt{-48 + 34\sqrt{2}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (30 - 66\sqrt{2})\, \mathrm{F}(\theta, \varphi) + 132\sqrt{2}\, \mathrm{E}(\theta, \varphi) \right] \right\}$$

in cui $\theta = 76^\circ\, 3'25'',9$; $\varphi = 80^\circ\, 7'14'',6$.

« Volume $= \frac{4}{15} \pi a^3$ (P).

« Raggio di curvatura della curva meridiana al primo polo $= \infty$ (P.).

" " " secondo " $= \frac{2}{3} a$ (P.).

« All'ordinata massima $a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$ corrisponde l'ascissa $\frac{a}{\sqrt[4]{27}}$ (P.).

« Area della curva meridiana $= a^2$ (P.).

« Distanza del centro di gravità dal polo principale $= \frac{15}{32} a$.

« Rapporto dell'attrazione a quella della sfera di egual massa $\sqrt[3]{\frac{27}{25}}$ (P.).

" " " " " diametro $\frac{6}{5}$ (P.).

" " " " massa racc. nel centro di gr. $\frac{675}{1024}$.

« Raggio della sfera di eguale attrazione $= \frac{3}{5} a$.

« E terminerò col seguente teorema, che pare sia sfuggito a quanti hanno trattato del corpo di m. a.

« *L'attrazione - lungo l'asse del corpo di m. a. - di un cono avente per vertice il polo principale e per base una porzione della superficie del corpo di m. a. limitata da un contorno qualsiasi è proporzionale alla massa di esso cono.*

« Di questa interessante proprietà si può dare una dimostrazione elementare. Considero un cono di apertura infinitesima ω e di lunghezza ϱ, ove ϱ faccia coll'asse del corpo di m. a. l'angolo ϑ. Allora l'attrazione sul vertice parallelamente all'asse vale $\omega\varrho \cos\vartheta$, mentre il volume vale $\omega\varrho^2 . \varrho/3$. La proporzionalità di sopra viene allora espressa con:

$$\omega\varrho \cos\vartheta = \frac{k\omega\varrho^3}{3} \quad \text{ossia} \quad \cos\vartheta = k'\varrho^2.$$

« Ma l'ultima relazione, se ϱ e ϑ sono variabili, non è altro che la equazione della superficie del corpo di m. a. Quello che vale che per un cono infinitesimo vale immediatamente per coni qualsiasi finiti e così è dimostrata la proprietà enunciata.

« Questa proprietà caratterizza completamente il corpo di m. a., ma è più speciale della proprietà che esso è limitato da una superficie di attrazione costante, perchè mentre quest'ultima è comune ad altre leggi di attrazione, quella è speciale dell'attrazione Newtoniana.

« Si può notare che il presente teorema presenta una certa analogia col teorema di Keller [1]: Sia un prisma retto avente per base un poligono qualunque e si consideri un punto O situato in una base, come vertice di una piramide avente per base l'altra base del prisma; se ora il prisma mantiene il suo volume costante, mentre la base si mantiene simile e similmente posta rispetto al punto O, l'attrazione del prisma sul punto O nella direzione dell'asse del prisma, sarà massima, quando essa sta all'attrazione della piramide nel rapporto delle masse dei due corpi ».

Chimica. — *Delle relazioni tra il periodo di Lothar Meyer ed il periodo del Mendeleeff.* — *Della disposizione de' pesi specifici dei corpi semplici nel sistema periodico degli elementi chimici.* Note di Ugo Alvisi, presentate a nome del Corrispondente Nasini.

Queste due Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

[1] Vedine l'elegante dimostrazione elementare data dal Keller nel suo *Nachträgliches* ecc. sopra citato pag. 31.