ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

« Prendo ora a caso una delle mie esperienze. In essa era tale la concentrazione della soluzione esterna che si aveva equilibrio, quando

$$P' = -50 \text{ cm.} = -0{,}66 \text{ atm.},$$

cioè quando il livello del mercurio nel braccio esterno del manometro era a 50 cm. sotto il livello interno. Poichè si vuole che la pressione dovuta agli urti delle molecole dello zucchero sia sempre nel vaso osmotico eguale a 53 cm. avremo

$$\pi_1 = 53 \text{ cm.} = 0{,}7 \text{ atm.}$$

e

$$p' = 1 - 0{,}66 - 0{,}70 = -0{,}36 \text{ atm.}$$

« L'ipotesi sostenuta nella Nota citata conduce dunque alla conclusione che l'acqua della soluzione interna può trovarsi sotto pressione nulla o negativa. Come può accettarsi una ipotesi che conduce a tali conseguenze? Che un corpo solido possa essere soggetto a pressione tanto positiva, quanto negativa, tanto compresso, quanto stirato, si sa bene, ma per un liquido come spiegare la cosa, salvo che si prestino al liquido per l'occasione le proprietà d'un solido?

« Io non nego che possa venir stabilita una teoria dei fenomeni osmotici, la quale si appoggi sulla considerazione dei moti delle particelle della sostanza disciolta e sull'analogia parziale con i gas, ma dico che questa teoria sarà necessariamente complessa e che il semplice concetto dello stato gassoso della sostanza disciolta senza quello di speciali azioni fra essa e il solvente, non è sufficiente a spiegare i fenomeni ».

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia.* Nota II. di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

§ IV.

« 13. Si può domandare se vi sono altri enti connessi come quello che ci ha condotti alle formule (1); o, per dir meglio, se vi sono altre reti di quadriche per mezzo di cui si possano ottenere altri sistemi di formule come la (1). La simmetria della superficie rispetto ai suoi cinque punti tripli consiglia di dire che sì. In fatti, il ragionamento seguente ce ne assicura, e ci dà il modo di costruire quelle reti quadriche.

« Si fissi uno qualunque $A_k\, A_l\, A_m\, A_n$ dei 5 tetraedri che si possono formare coi punti tripli, e si dica $\psi_i = 0$ una quadrica qualunque ad esso coniugata. La polare di b rispetto a $\psi_i = 0$ sia b_i, e b'_i sia la tangente in A_i alla curva doppia. Il piano polare μ_i di A_i rispetto a $\psi_i = 0$ tagli b_i in A'_i, e si costruiscano due $f^{(i)} = 0$, $\varphi^{(i)} = 0$ delle quadriche coniugate ad $A_k\, A_l\, A_m\, A_n$ rispetto a cui A'_i e b'_i sono elementi reciproci; dico che la rete delle $f^{(i)}=0$, $\varphi^{(i)}=0$, $\psi_i=0$ risponde all'asserto. In fatti, applicando il procedimento col quale dalle (2) e (3) si è pervenuto alle (1), al caso in cui queste equazioni vengono rimpiazzate dalle

$$\lambda f^{(i)}+\mu\varphi^{(i)}=0 \qquad (2')$$

$$\psi_i=0 \qquad (3')$$

si perviene ad una superficie del 5° ordine con 5 punti tripli nei punti $A_1, \dots, A_5$ e con la retta b, poichè è b la polare, rispetto a (3'), della coniugata b_i del punto A_i rispetto al fascio (2'). Ma, in virtù del 1° dei teoremi del n. 5, questi elementi individuano la superficie, dunque, non considerando come distinte tutte le reti di quadriche che possono farsi coniugatamente ad uno stesso tetraedro, noi possiamo dire che:

« La superficie del 5° ordine con 5 punti tripli e cubica doppia può essere ottenuta, in 5 modi diversi, per mezzo di reti di quadriche coniugate ai 5 tetraedri del pentagono dei punti tripli.

« E corrispondentemente:

« Vi sono 5 sistemi di formule, analoghe al sistema (1), atte a rappresentare la medesima superficie del 5° ordine.

« È bene di osservare che tutti questi sistemi di formule restano inalterati per le sostituzioni:

$$\lambda'=\frac{1}{\lambda}\,,\quad \mu'=\frac{1}{\mu}\,,\quad \tau'=\frac{\tau}{\lambda\mu}\,\text{»}.$$

§ V.

« 14. Prima di passare a cavare delle conseguenze relative ad altri modi di costruzione della superficie, cerchiamo delle altre rappresentazioni parametriche, utilizzando quanto si disse al n. 4.

« Diciamo rispettivamente $a_x=0$, $b_x=0$, $c_x=0$, $d_x=0$, $e_x=0$ ove $\gamma_x=\sum_1^3\gamma_i x_i$ e $\gamma\equiv a, b, c, d, e$, le equazioni dei successivi lati 12...5 del pentalatero fondamentale, e formiamo il sistema lineare di quartiche piane:

$$\lambda_1 b_x c_x d_x e_x+\lambda_2 a_x c_x d_x e_x+\lambda_3 a_x b_x d_x e_x+\lambda_4 a_x b_x c_x e_x+\lambda_5 a_x b_x c_x d_x=0 \quad (13)$$

ove sono $\lambda_1:\lambda_2:\dots:\lambda_5$ parametri variabili colle quartiche del sistema. Se poniamo le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &z_1\equiv h_1 b_x c_x d_x e_x,\ z_2\equiv h_2 a_x c_x d_x e_x,\ z_3\equiv h_3 a_x b_x d_x e_x,\ z_4\equiv h_4 a_x b_x c_x d_x,\\ &\qquad z_5\equiv h_5\, a_x b_x c_x d_x \end{aligned}\right\}(14)$$

ove $h_1, h_2, \dots, h_5$ sono delle costanti date; e poi, poste le

$$y_i\equiv\sigma\,\xi_i+\tau z_i \quad (i=1,\dots,5) \qquad (15)$$

determiniamo σ e τ per modo che si abbia

$$\alpha_y=0 \qquad (16)$$

noi avremo le

$$y_i\equiv\alpha_z\,\xi_i-\alpha\xi\, z_i \quad (i=1,\dots,5) \qquad (17)$$

le quali, rappresentano, con un numero soverchio di coordinate, una superficie del 6° ordine, con 10 rette e 5 punti tripli, avente per sistema lineare rappresentativo, il sistema (contenuto nel sistema (13)) di equazione

$$\alpha_z \lambda_\xi - \alpha_\xi \lambda_z = 0 . \qquad (18)$$

Se, però, per la (16) si prende la $y_5 = 0$, le (17) diventano

$$y_i \equiv z_5 . \xi_i - \xi_5 . z_i \quad (i = 1, \dots, 4) \qquad (19)$$

e queste rappresentano la stessa superficie, ma non più con un numero soverchio di coordinate. Ciò finchè le ξ_i $(i = 1, \dots 5)$ scelte sono qualunque; ma se queste quantità sono i valori che prendono le z per le coordinate del punto B del piano rappresentativo, allora il sistema (18) che ora è diventato

$$z_5 \lambda_\xi - \xi_5 \lambda_z = 0 \qquad (20)$$

è composto di curve che passano tutte per B; epperò la superficie rappresentata dalle (19) è allora della specie che stiamo studiando. Se indichiamo con $a'_x, b'_x, \dots, e'_x$ ciò che diventano le $a_x, b_x, \dots, e_x$ per le coordinate di B, noi abbiamo, in forma esplicita le seguenti formule di rappresentazione della superficie:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv h_1 . b'_x c'_x d'_x . b_x c_x d_x (a_x e'_x - a'_x e_x) \\ y_2 &\equiv h_2 . a'_x c'_x d'_x . a_x c_x d_x (b_x e'_x - b'_x e_x) \\ y_3 &\equiv h_3 . a'_x b'_x d'_x . a_x b_x d_x (c_x e'_x - c'_x e_x) \\ y_4 &\equiv h_4 . a'_x b'_x c'_x . a_x b_x c_x (d_x e'_x - d'_x e_x) \end{aligned}\right\} . \qquad (21)$$

A queste formule, del resto, noi saremmo potuti giungere senza passare per la superficie (14) dello spazio a 4 dimensioni, associando alla (13) la condizione:

$$\lambda_1 b'_x c'_x d'_x e'_x + \lambda_2 a'_x c'_x d'_x e'_x + \lambda_3 a'_x b'_x d'_x e'_x + \lambda_4 a'_x b'_x c'_x e'_x + \lambda_5 a'_x b'_x c'_x d'_x = 0$$

la quale, insieme alla (13), per eliminazione del parametro λ_5, avrebbe dato precisamente il sistema lineare (20) che ci ha condotti alle formule (21). Il metodo precedente è però più generale, e ci offre il vantaggio di fornire le equazioni (19) di una superficie del 6° ordine di cui quella del 5° è un caso di degenerazione.

« Di formule, come le (21), se ne hanno evidentemente diversi sistemi, e si deducono l'uno dall'altro per mezzo di trasposizioni. Corrispondentemente ad uno stesso tetraedro formato coi punti tripli si hanno 4 di tali sistemi, e ciascuno corrisponde ai 4 sistemi di cubiche sghembe della superficie (n. 4) che, sistema per sistema, passano per tre dei vertici di esso. Siccome due qualunque di quei tetraedri hanno sempre a comune tre vertici, così i suddetti sistemi di formule corrispondono ai primi 10 sistemi di cubiche della superficie.

« Quale è il sistema di formule che corrisponde all'11° sistema di cubiche che la superficie possiede?

« Ricordiamo che se si fissa una quadrica nel fascio (2), cioè se nelle (1) si assegna un valore al parametro $\lambda : \mu$, la cubica rappresentata dalle (1) è il luogo dei punti allineati con ξ_i, e con i proprii corrispondenti nell'omografia risultante dal comporre la polarità rispetto alla quadrica (3) con la polarità rispetto alla quadrica scelta in (2). Quella cubica perciò passa per tutti e 5 i punti tripli, ed è una cubica dell'11° sistema.

« Si può dunque assumere come sistema di formule corrispondente all'11° sistema di cubiche della superficie, uno qualunque dei 5 che si hanno dall'ultimo teorema del n. 13; e dei quali uno è quello dato dalle formule (1).

« 15. Noi vogliamo ora scrivere d'una maniera generale le formule di questi 5 sistemi: lo faremo trasformando le formule (1): sarà facile poi, dietro la costruzione data delle 5 reti corrispondenti, di scrivere quelle degli altri sistemi.

« Siano α_i, β_i, γ_i, δ_i, ε_i $(i=1,\ldots,4)$ le coordinate dei vertici del pentagono dei punti tripli quando un tetraedro qualunque sia stato preso per tetraedro di riferimento. Se supponiamo che ε_i sia quel vertice del pentagono che prima rappresentavano con ξ_i, noi potremo scrivere le (2) e (3) nella forma:

$$\begin{gathered} c_{11}(\beta\gamma\delta x)^2+c_{22}(\gamma\alpha\delta x)^2+c_{33}(\alpha\beta\delta x)^2+c_{44}(\alpha\beta\gamma x)^2=0 \qquad (22) \\ \psi_1(\beta\gamma\delta x)^2+\psi_2(\gamma\alpha\delta x)^2+\psi_3(\alpha\beta\delta x)^2+\psi_4(\alpha\beta\gamma x)^2=0 \end{gathered}$$

ed allora, operando come nella mia Nota: « *Sulla superficie del 5° ordine a cubica doppia e punto triplo* » l. c., noi dobbiamo porre le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \nu\tau_1 &= (D_{11}-\tau)\,x_1+D_{12}\,x_1+D_{13}\,x_3+D_{14}\,x_4 \\ \nu\varepsilon_2 &= D_{21}\,x_1+(D_{22}-\tau)\,x_2+D_{23}\,x_3+D_{24}\,x_4 \\ \nu\varepsilon_3 &= D_{31}\,x_1+D_{32}\,x_2+D_{33}-\tau)\,x_3+(D_{44}\,x_4 \\ \nu\varepsilon_4 &= D_{41}\,x_1+D_{42}\,x_2+D_{43}\,x_3+(D_{44}-\tau)\,x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

ove ora è:

$$D_{rs}=C_{1r}\,\psi_{1s}+C_{2r}\,\psi_{2s}+C_{3r}\,\psi_{3s}+C_{4r}\,\psi_{4s}$$

$$\psi_{mn}=\psi_1(\beta\gamma\delta)_m(\beta\gamma\delta)_n+\psi_2(\gamma\alpha\delta)_m(\gamma\alpha\delta)_n+\psi_3(\alpha\beta\delta)_m(\alpha\beta\delta)_n+\psi_4(\alpha\beta\gamma)_m(\alpha\beta\gamma)_n$$

e C_{mn} è il minore complementare dell'elemento $\mathbf{c}_{mn}$ nel determinante

$$|\mathbf{c}_{mn}|=|c_{11}(\beta\gamma\delta)_m(\beta\gamma\delta)_n+c_{22}(\gamma\alpha\delta)_m(\gamma\alpha\delta)_n+c_{33}(\alpha\beta\delta)_m(\alpha\beta\delta)_n+c_{44}(\alpha\beta\gamma)_m(\alpha\beta\gamma)_n|.$$

§ VI.

« 16. Dopo il problema della rappresentazione parametrica si presenta quello di scrivere l'equazione della superficie. Questa equazione è già contenuta nelle 20 del tipo (9), e nell'unica del tipo (12), a cui conducono i 21 modi di generazione di cui è parola nei n.i 11 e 12. Ma noi abbiamo anche 5 altri modi derivanti dalla proprietà stabilita nel n. 3 che lega la superficie col cono cubico tangente in uno dei suoi 5 punti tripli, e 10 altri modi, 5 dei quali sono subordinati ai 5 sistemi di formule analoghe al sisfema (1), e 5 a degli enti connessi punto-piano di cui discorreremo nel paragrafo seguente; e che provengono, sebbene non direttamente, dalla considerazione di questi medesimi 5 sistemi di formule. In totale, dunque, 36 modi diversi. — Non è mica nostra intenzione di dare tutte queste 36 forme diverse di equazioni, ma come il tipo delle prime 21 è stato già dato (n.i 11 e 12) e quello delle ultime 10 è identico a quello dato per la sup. gen. del 5° ordine a cubica doppia e punto triplo (Cfr. in prop. il § II della Nota: *Altra proprietà* ecc., l. c.) così io mi limito a dare ora soltanto una delle forme di equazioni corrispondenti ai rimanenti 5 tipi, riserbandomi nel paragrafo seguente di tornare sulla forma di equazione che corrisponde ai 5 connessi punto-piano di cui ora si è parlato.

« Fatte le medesime ipotesi che nel n. 15 le equazioni della trasformazione cubica, di cui al n. 3, diventano

$$\left.\begin{aligned}(\beta\gamma\delta x)(\beta\gamma\delta x') &= (\beta\gamma\delta\varepsilon)^2 = \Lambda_1^2\\ (\gamma\alpha\delta x)(\gamma\alpha\delta x') &= (\gamma\alpha\delta\varepsilon)^2 = \Lambda_2^2\\ (\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\delta x') &= (\alpha\beta\delta\varepsilon)^2 = \Lambda_3^2\\ (\alpha\beta\gamma x)(\alpha\beta\gamma x') &= (\alpha\beta\gamma\varepsilon)^2 = \Lambda_4^2\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

avendo posto:

$$\Lambda_1 = (\beta\gamma\delta\varepsilon), \quad \Lambda_2 = (\gamma\alpha\delta\varepsilon), \quad \Lambda_3 = (\alpha\beta\delta\varepsilon), \quad \Lambda_4 = (\alpha\beta\gamma\varepsilon);$$

epperò se è

$$\varphi(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3) = 0 \tag{26}$$

ove $\mathfrak{J}_1 = (\alpha\beta\varepsilon x)$, $\mathfrak{J}_2 = (\beta\gamma\varepsilon x)$, $\mathfrak{J}_3 = (\gamma\alpha\varepsilon x)$ una funzione cubica di $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ che si annulla per $x_i = \delta_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$; e se inoltre per un sistema di valori $\mathfrak{H}_i$ delle $\mathfrak{J}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{J}_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{J}_2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{J}_3} = 0$$

l'equazione della superficie si otterrà facendo nella (26) le sostituzioni (25). Noi, p. e., possiamo prendere la φ nella forma:

$$\vartheta_{\mathfrak{J}}^3 + \theta_{\mathfrak{J}}^3 + \mu\vartheta_{\mathfrak{J}}\theta_{\mathfrak{J}}\chi_{\mathfrak{J}} = 0 \tag{27}$$

dove $\vartheta_{\mathfrak{J}} = \vartheta_1\mathfrak{J}_1 + \vartheta_2\mathfrak{J}_2 + \vartheta_3\mathfrak{J}_3$, e così $\theta_{\mathfrak{J}} = \theta_1\mathfrak{J}_1 + \cdots$, $\chi_{\mathfrak{J}} = \chi_1\mathfrak{J}_1 + \cdots$; e μ è da determinarsi per modo che sia

$$\vartheta_\Lambda^3 + \theta_\Lambda^3 + \mu\vartheta_\Lambda\theta_\Lambda\chi_\Lambda = 0;$$

cioè nella forma:

$$\vartheta_\Lambda\theta_\Lambda\chi_\Lambda(\vartheta_{\mathfrak{J}}^3 + \theta_{\mathfrak{J}}^3) - \vartheta_{\mathfrak{J}}\theta_{\mathfrak{J}}\chi_{\mathfrak{J}}(\vartheta_\Lambda^3 + \theta_\Lambda^3) = 0 \tag{28}$$

« Per applicare a questa equazione convenientemente, e rapidamente, le sostituzioni (25), osserveremo dapprima che la trasformazione cubica da esse definita si risolve in quella data dalla

$$y'_1 y_1 = \Lambda_1^2, \quad y'_2 y_2 = \Lambda_2^2, \quad y'_3 y_3 = \Lambda_3^2, \quad y'_4 y_4 = \Lambda_4^2 \tag{29}$$

preceduta e seguita dall'omografia:

$$\left.\begin{aligned}y_1 &\equiv (\beta\gamma\delta x)\\ y_2 &\equiv (\gamma\alpha\delta x)\\ y_3 &\equiv (\alpha\beta\delta x)\\ y_4 &\equiv (\alpha\beta\gamma x)\end{aligned}\right\}; \tag{30}$$

cosicchè, come le (30), risolute rispetto alle x, dànno:

$$x_i \equiv y_1\alpha_i + y_2\beta_i + y_3\gamma_i + y_4\delta_i \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

così si ha:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &\equiv (\beta\gamma\varepsilon x) \equiv \Sigma(\beta\gamma\varepsilon)_i x_i = -(\alpha\beta\gamma\varepsilon).y_1 - \Lambda_1 y_4 \equiv \Lambda_4 y_1 - \Lambda_1 y_4\\ \mathfrak{J}_2 &\equiv (\gamma\alpha\varepsilon x) \equiv \Sigma(\gamma\alpha\varepsilon)_i x_i = -(\beta\gamma\alpha\varepsilon).y_2 - \Lambda_2 y_4 \equiv \Lambda_4 y_2 - \Lambda_2 y_4\\ \mathfrak{J}_3 &\equiv (\alpha\beta\varepsilon x) \equiv \Sigma(\alpha\beta\varepsilon)_i x_i = -(\alpha\beta\gamma\varepsilon).y_3 - \Lambda_3 y_4 \equiv \Lambda_4 y_3 - \Lambda_3 y_4\end{aligned}\right\}(31)$$

e queste conducono a

$$\vartheta_{\mathfrak{Z}} = \Lambda_4 \vartheta_y + y_4 \vartheta_\Lambda, \quad \theta_{\mathfrak{Z}} = \Lambda_4 \theta_y + y_4 \theta_\Lambda, \quad \chi_{\mathfrak{Z}} = \Lambda_4 \chi_y + y_4 \chi_\Lambda$$

così il cono cubico (28) si muta nell'altro

$$\left.\begin{aligned}&\{(\Lambda_4 \vartheta_y + y_4 \vartheta_\Lambda)^3 + (\Lambda_4 \theta_y + y_4 \theta_\Lambda)^3\}\, \vartheta_\Lambda \theta_\Lambda \chi_\Lambda +\\ &-(\Lambda_4 \vartheta_y + y_4 \vartheta_\Lambda)(\Lambda_4 \theta_y + y_4 \theta_\Lambda)(\Lambda_4 \chi_y + y_4 \chi_\Lambda)(\vartheta_\Lambda^3 + \theta_\Lambda^3) = 0.\end{aligned}\right\}(32)$$

« Ora, per mezzo delle (29), si ha

$$\begin{aligned}\Lambda_4 \vartheta_y + y_4 \vartheta_\Lambda &\equiv \vartheta_1 \Lambda_1^2 y'_2 y'_3 y'_4 + \vartheta_2 \Lambda_2^2 y'_1 y'_3 y'_4 + \vartheta_3 \Lambda_3^2 y'_1 y'_2 y'_4 +\\ &\quad + \vartheta_\Lambda \Lambda_4 y'_1 y'_2 y'_3\\ \Lambda_4 \theta_y + y_4 \theta_\Lambda &\equiv \theta_1 \Lambda_1^2 y'_2 y'_3 y'_4 + \theta_2 \Lambda_2^2 y'_1 y'_3 y'_4 + \theta_3 \Lambda_3^2 y'_1 y'_2 y'_4 +\\ &\quad + \theta_\Lambda \Lambda_4 y'_1 y'_2 y'_3\\ \Lambda_4 \chi_y + y_4 \chi_\Lambda &\equiv \chi_1 \Lambda_1^2 y'_2 y'_3 y'_4 + \chi_2 \Lambda_2^2 y'_1 y'_3 y'_4 + \chi_3 \Lambda_3^2 y'_1 y'_2 y'_4 +\\ &\quad + \chi_\Lambda \Lambda_4 y'_1 y'_2 y'_3\end{aligned}$$

e queste, per le (30), diventano:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_4\vartheta_y + y_4\vartheta_\Lambda &\equiv \vartheta_1\Lambda_1^2(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \vartheta_2\Lambda_2^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) +\\ &\quad + \vartheta_3\Lambda_3^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \vartheta_\Lambda\Lambda_4(\beta\gamma\delta x)(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)\\ \Lambda_4\theta_y + y_4\theta_\Lambda &\equiv \theta_1\Lambda_1^2(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \theta_2\Lambda_2^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) +\\ &\quad + \theta_3\Lambda_3^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \theta_\Lambda\Lambda_4(\beta\gamma\delta x)(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)\\ \Lambda_4\chi_y + y_4\chi_\Lambda &\equiv \chi_1\Lambda_1^2(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \chi_2\Lambda_2^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) +\\ &\quad + \chi_3\Lambda_3^2(\beta\gamma\delta x)(\alpha\beta\delta x)(\alpha\beta\gamma x) + \chi_\Lambda\Lambda_4(\beta\gamma\delta x)(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)\end{aligned}\right\}(33)$$

quindi si può ritenere per equazione della superficie la (31) quando si immagini che le quantità $\Lambda_4\vartheta_\Lambda + y_4\vartheta_\Lambda$, $\Lambda_4\theta_y + y_4\theta_\Lambda$, $\Lambda_4\chi_y + y_4\chi_\Lambda$ che in essa entrano abbiano i valori (33).

« Dal confronto della (31) con le (33) si vede che per

$$(\alpha\beta\gamma x) = 0$$

la (32) riducesi ad un'identità; e così anche per $(\beta\gamma\delta x) = 0$, $(\gamma\alpha\delta x) = 0$, $(\alpha\beta\delta x) = 0$. Se ne conclude che, dopo le sostituzioni (33) nella (32), dall'equazione risultante, del 9° grado, se ne stacca il fattore $(\alpha\beta\gamma x)(\beta\gamma\delta x)(\gamma\alpha\delta x)(\alpha\beta\delta x)$; epperò l'equazione della superficie si ottiene uguagliando a zero il fattore restante.

« 17. Non possiamo passare sotto silenzio un altro modo di rappresentazione della superficie, il quale sorge spontaneo dalle conclusioni precedenti. Se, in fatti, noi poniamo:

$$\frac{\vartheta_\Lambda^3 + \theta_\Lambda^3}{\vartheta_\Lambda \theta_\Lambda \chi_\Lambda} = 6k,$$

e poi incorporiamo la costante k nella forma lineare $\chi_{\mathfrak{Z}}$, dopo di che questa la diremo di nuovo $\chi_{\mathfrak{Z}}$, il cono cubico (28) potrà essere scritto nella forma

$$\vartheta_{\mathfrak{Z}}^3 + \theta_{\mathfrak{Z}}^3 - 6\vartheta_{\mathfrak{Z}}\theta_{\mathfrak{Z}}\chi_{\mathfrak{Z}} = 0$$

da cui si ha, indicando con λ, μ due parametri omogenei variabili da una generatrice all' altra:

$$\vartheta_{\mathfrak{Z}} = 6\lambda^2\mu\,,\qquad \theta_{\mathfrak{Z}} = 6\lambda\mu^2\,,\qquad \chi_{\mathfrak{Z}} = \lambda^3 + \mu^3$$

epperò anche:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_1 &\equiv 6(\theta\chi)_{23}\,.\,\lambda^2\mu + 6(\chi\vartheta)_{23}\,.\,\lambda\mu^2 + (\vartheta\theta)_{23}\,.\,(\lambda^3+\mu^3) = \varphi_1\\
\mathfrak{Z}_2 &\equiv 6(\theta\chi)_{31}\,.\,\lambda^2\mu + 6(\chi\vartheta)_{31}\,.\,\lambda\mu^2 + (\vartheta\theta)_{31}\,.\,(\lambda^3+\mu^3) = \varphi_2\\
\mathfrak{Z}_3 &\equiv 6(\theta\chi)_{12}\,.\,\lambda^2\mu + 6(\chi\vartheta)_{12}\,.\,\lambda\mu^2 + (\vartheta\theta)_{12}\,.\,(\lambda^3+\mu^3) = \varphi_3
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

dove abbiamo creduto indicare con φ_1, φ_2, φ_3 le funzioni di λ, μ proporzionali ad $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$.

« Facendo le sostituzioni (20), e tenendo, dopo, conto delle (31) si ha:

$$\Lambda_4\, y_1 = \varphi_1 + \Lambda_1\, y_4\,,\quad \Lambda_4\, y_2 = \varphi_2 + \Lambda_2\, y_4\,,\quad \Lambda_4\, y_3 = \varphi_3 + \Lambda_3\, y_4\,;$$

cosicchè, determinando y_4 per modo che si abbia $u_y = 0$, cioè ponendo

$$y_4 = -\frac{u_\varphi}{u_\Lambda}\,,\quad u_\varphi = u_1\,\varphi_1 + u_2\,\varphi_2 + u_3\,\varphi_3$$

si avranno le formule

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}
y_1 &= u_\Lambda\,.\,\varphi_1 - \Lambda_1\,.\,u_\varphi\\
y_2 &\equiv u_\Lambda\,.\,\varphi_2 - \Lambda_2\,.\,u_\varphi\\
y_3 &\equiv u_\Lambda\,.\,\varphi_3 - \Lambda_3\,.\,u_\varphi\\
y_4 &\equiv \quad * \quad - \Lambda_4\,.\,u_\varphi
\end{aligned}\right.\qquad u_\varphi = 6(\theta\chi u)\lambda^2\mu + 6(\chi\vartheta u)\lambda\mu^2 + (\vartheta\theta u)\,(\lambda^3+\mu^3)$$

le quali rappresentano, nel parametro $\lambda:\mu$, la cubica sezione del piano $u_y = 0$ col cono cubico (34). Ne segue che, applicando la (29), e poi di nuovo la (30), le formule:

$$(\beta\gamma\delta x):(\gamma\alpha\delta x):(\alpha\beta\delta x):(\alpha\beta\gamma x) = \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_1}:\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_2}:\frac{\Lambda_3^2}{\Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_3}:\frac{\Lambda_4}{u_\varphi}$$

ovvero le:

$$(36)\quad x_i \equiv \frac{\Lambda_1^2\alpha_i}{\Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_1} + \frac{\Lambda_2^2\beta_i}{\Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_2} + \frac{\Lambda_3^2\gamma_i}{\Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_3} + \frac{\Lambda_4\delta_i}{u_\varphi}\,(i=1\,,\dots,4)$$

rappresenteranno, nel parametro $\lambda:\mu$, la curva, del 9° ordine, ulteriore sezione della superficie colla superficie cubica di equazione:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1^2 u_1\,(\gamma\alpha\delta x)\,(\alpha\beta\delta x)\,(\alpha\beta\gamma x) + \Lambda_2^2 u_2\,(\beta\gamma\delta x)\,(\alpha\beta\delta x)\,(\alpha\beta\gamma x) +\\
&+ \Lambda_3^2 u_3\,(\beta\gamma\delta x)\,(\gamma\alpha\delta x)\,(\alpha\beta\gamma x) + \Lambda_4^2 u_4\,(\beta\gamma\delta x)\,(\gamma\alpha\delta x)\,(\alpha\beta\delta x) = 0
\end{aligned}$$

l'altra parte della sezione essendo composta delle 6 costole del tetraedro dei punti α_i, β_i, γ_i, δ_i $(i = 1\,,\dots,4)$.

« Si osservi che, sopra una sezione piana qualunque $v_x = 0$, i punti della curva (36) sono dati dalla equazione:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1^2 v_\alpha(\Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_2)(\Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_3)u_\varphi + \Lambda_2^2 v_\beta(\Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_1)(\Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_3)u_\varphi\\
&+\Lambda_3^2 v_\gamma(\Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_1)(\Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_2)u_\varphi + \Lambda_4\, v_\delta(\Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_1)(\Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_2)(\Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda\varphi_3) = 0.
\end{aligned}$$

« Ne segue che, sezionando coi piani $v_\delta = 0$, i punti in quistione saranno dati da

$$(37)\quad u_\varphi = 0 \text{ e da } \sum_{i=1}^{i=3}\Lambda_i^2 v_{\theta_i}(\Lambda_k u_\varphi - u_\Lambda\varphi_k)(\Lambda_l u_\varphi - u_\Lambda\varphi_l) = 0\ \ (i,k,l \equiv 1,2,3\,;\ \theta_1 = \alpha,\ \theta_2 = \beta,\ \theta_3 = \gamma)$$

e quindi che il punto ϑ_i ($i=1, \dots, 4$) è triplo per la curva e si arriva ad esso coi tre valori del parametro $\lambda:\mu$ radici della cubica $u_\varphi = 0$.

« Similmente, sezionando coi piani $v_\alpha = 0$, $v_\beta = 0$, $v_\gamma = 0$ si hanno, rispettivamente a determinare i punti in quistione le equazioni:

$$\begin{array}{ll} (38) & \Lambda_1 u_\varphi - u_\Lambda \varphi_1 = 0 \\ (39) & \Lambda_2 u_\varphi - u_\Lambda \varphi_2 = 0 \\ (40) & \Lambda_3 u_\varphi - u_\Lambda \varphi_3 = 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \Lambda_i^2 v_{\theta_i} (\Lambda_k u_\varphi - u_\Lambda \varphi_k)(\Lambda_l u_\varphi - u_\Lambda \varphi_l) + \\ + \Lambda_4 v_\delta (\Lambda_k u_\varphi - u_\Lambda \varphi_k)(\Lambda_l u_\varphi - u_\Lambda \varphi_l) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \begin{matrix} i \\ k \\ l \end{matrix} = \left\{ 2, 3 ; \; \theta_i \equiv \beta, \gamma \right. \\ \begin{matrix} i \\ k \\ l \end{matrix} = \left\{ 3, 1 ; \; \theta_i \equiv \gamma, \alpha \right. \\ \begin{matrix} i \\ k \\ l \end{matrix} = \left\{ 1, 2 ; \; \theta_i \equiv \alpha, \beta \right. \end{array}$$

e queste mostrano che sono tripli per la curva anche i punti α_i, β_i, γ_i; arrivandosi a ciascuno di questi colle terne di valori del parametro $\lambda:\mu$ radici delle cubiche (38), (39), (40) (1).

« 18. Fra le curve, in numero ∞^3, rappresentate dalle (36), ve ne sono ∞^1 ciascuna scissa in una terna di cubiche; esse si ottengono corrispondentemente ai piani u_i condotti pel punto ε_i. Se, anzi, questi piani sono addirittura quelli che passano per la retta $\vartheta_\delta = 0$, $\theta_\delta = 0$ si ottengono dalle (36) le rappresentazioni di quelle cubiche che prima erano rappresentate dal sistema (1) conformemente a quanto si disse al n. 3, insieme alla rappresentazione della cubica doppia considerata come cubica di ognuna delle suddette terne, ripetuta due volte. A dare alle (36) una forma propria, speciale al caso, poniamo:

$$\omega_i = \sigma \vartheta_i + \tau \theta_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

allora si potrà prendere:

$$\begin{aligned} u_i &\equiv \omega_1 (\beta\gamma\varepsilon)_i + \omega_2 (\gamma\alpha\varepsilon)_i + \omega_3 (\alpha\beta\varepsilon)_i \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_\Lambda &= \omega_1 (\beta\gamma\varepsilon\Lambda) + \omega_2 (\gamma\alpha\varepsilon\Lambda) + \omega_3 (\alpha\beta\varepsilon\Lambda) \end{aligned}$$

« Ora, siccome le Λ_i sono, per la definizione che delle medesime risulta dalle (25), soluzioni del sistema:

$$\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3 + \delta_i x_4 = \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, 4)$$

così si avrà:

$$\begin{aligned} (\beta\gamma\varepsilon\Lambda) &= (\beta\gamma\alpha\Lambda)\,\Lambda_1 + (\beta\gamma\delta\Lambda)\,\Lambda_4 \\ (\gamma\alpha\varepsilon\Lambda) &= (\gamma\alpha\beta\Lambda)\,\Lambda_2 + (\gamma\alpha\delta\Lambda)\,\Lambda_4 \\ (\alpha\beta\varepsilon\Lambda) &= (\alpha\beta\gamma\Lambda)\,\Lambda_3 + (\alpha\beta\delta\Lambda)\,\Lambda_4 \end{aligned}$$

(1) Che la curva, ulteriore sezione della superficie con una superficie cubica arbitraria condotta pei sei spigoli del tetraedro dei punti α_i, β_i, γ_i, δ_i abbia in questi punti dei punti tripli si può, del resto, ottenere come segue. La curva totale intersezione deve avere in $\alpha_i, \dots$ dei punti sestupli. Ora essi punti sono tripli pel sistema delle tre costole del suddetto tetraedro uscenti da ciascuno; queste costole faranno parte della curva d'intersezione; dunque l'altra parte avrà quei punti per punti tripli; come v. d.

avendo indicato con $\mathfrak{E}_1, \dots, \mathfrak{E}_4$ le coordinate del trasformato del punto $\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_4$ per mezzo delle (28). Ne segue essere:

$$u_\Lambda = \mathfrak{E}_4 \Lambda_\omega + \mathfrak{E}_\omega \Lambda_4 = \sigma (\mathfrak{E}_4 \Lambda_\xi + \mathfrak{E}_\xi \Lambda_4) + \tau (\mathfrak{E}_4 \Lambda_\theta + \mathfrak{E}_\theta \Lambda_4)$$

« Ora è anche

$$u_\varphi = \omega_1 (\beta\gamma\varepsilon\varphi) + \omega_2 (\gamma\alpha\varepsilon\varphi) + \omega_3 (\alpha\beta\varepsilon\varphi),$$

perciò, ponendo:

$$\vartheta_1 (\beta\gamma\varepsilon\varphi) + \vartheta_2 (\gamma\alpha\varepsilon\varphi) + \vartheta_3 (\alpha\beta\varepsilon\varphi) = \psi_4$$
$$\theta_1 (\beta\gamma\varepsilon\varphi) + \theta_2 (\gamma\alpha\varepsilon\varphi) + \theta_3 (\alpha\beta\varepsilon\varphi) = \psi_2$$
$$\mathfrak{E}_4 \Lambda_\xi + \mathfrak{E}_\xi \Lambda_4 = \mathrm{D}, \quad \mathfrak{E}_4 \Lambda_\theta + \mathfrak{E}_\theta \Lambda_4 = \mathrm{T}, \quad \text{e poi anche}$$
$$\Lambda_i \psi_1 - \mathrm{D}\varphi_i = \mathrm{R}_i, \quad \Lambda_i \psi_2 - \mathrm{T}\varphi_i = \mathrm{S}_i$$

le formule (36) diventano:

$$x_i = \frac{\Lambda_1{}^2 \alpha_i}{\sigma \mathrm{R}_1 + \tau \mathrm{S}_1} + \frac{\Lambda_2{}^2 \beta_i}{\sigma \mathrm{R}_2 + \tau \mathrm{S}_2} + \frac{\Lambda_3{}^2 \gamma_i}{\sigma \mathrm{R}_3 + \tau \mathrm{S}_3} + \frac{\Lambda_4 \vartheta_i}{\sigma \psi_1 + \tau \psi_2} \quad (i=1, \dots, 4)$$

e sono queste le richieste ».

Matematica. — *A proposito di una Memoria sulle linee geodetiche del sig. G. Königs.* Nota del prof. GREGORIO RICCI, presentata dal Corrispondente PADOVA.

« Negli « Annali della Facoltà di Scienze di Tolosa » è apparso recentemente un riassunto della Memoria del sig. Königs sulle linee geodetiche, che l'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia ha ritenuta degna del premio Bordin. Avendo io in questi Rendiconti [1] resi di pubblica ragione i risultati delle mie ricerche sullo stesso argomento, mi permetto ora di aggiungere alcune osservazioni dirette principalmente a porre in rilievo la concordanza di alcuni risultati fondamentali comuni ai due lavori.

« Il sig. Königs si propone di determinare sotto la forma

1) $$\{ f(x+y) + g(x-y) \} \, dx dy$$

tutti gli elementi lineari di superficie, pei quali la equazione delle geodetiche ammette più integrali primi quadratici; o, che è lo stesso, che sono capaci di più di una riduzione alla forma di Liouville, e giunge alle seguenti conclusioni:

« 1.° La equazione delle geodetiche non ammette mai più di cinque integrali primi quadratici indipendenti, e questo numero è raggiunto soltanto per le superficie a curvatura costante.

« 2.° Il numero degli integrali primi quadratici indipendenti della equazione delle geodetiche non può mai essere eguale a quattro.

« 3.° Il numero stesso è eguale a tre soltanto per gli elementi lineari, che appartengono ad una classe di superficie di rivoluzione, pei quali l'esi-

[1] Seduta del 22 gennaio 1893.