

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

avendo indicato con  $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_4$  le coordinate del trasformato del punto  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$  per mezzo delle (28). Ne segue essere:

$$u_\Lambda = \mathfrak{C}_4 \Lambda_\omega + \mathfrak{C}_\omega \Lambda_4 = \sigma (\mathfrak{C}_4 \Lambda_\varepsilon + \mathfrak{C}_\varepsilon \Lambda_4) + \tau (\mathfrak{C}_4 \Lambda_\theta + \mathfrak{C}_\theta \Lambda_4)$$

• Ora è anche

$$u_\varepsilon = \omega_1 (\beta\gamma\varepsilon g) + \omega_2 (\gamma\alpha\varepsilon g) + \omega_3 (\alpha\beta\varepsilon g),$$

perciò, ponendo:

$$\mathfrak{J}_1 (\beta\gamma\varepsilon g) + \mathfrak{J}_2 (\gamma\alpha\varepsilon g) + \mathfrak{J}_3 (\alpha\beta\varepsilon g) = \psi_1$$

$$\theta_1 (\beta\gamma\varepsilon g) + \theta_2 (\gamma\alpha\varepsilon g) + \theta_3 (\alpha\beta\varepsilon g) = \psi_2$$

$$\mathfrak{C}_4 \Lambda_\varepsilon + \mathfrak{C}_\varepsilon \Lambda_4 = D, \quad \mathfrak{C}_4 \Lambda_\theta + \mathfrak{C}_\theta \Lambda_4 = T, \quad \text{e poi anche}$$

$$\Lambda_i \psi_1 - Dg_i = R_i, \quad \Lambda_i \psi_2 - Tg_i = S_i$$

le formole (36) diventano:

$$x_i = \frac{\Lambda_1^2 \alpha_i}{\sigma R_1 + \tau S_1} + \frac{\Lambda_2^2 \beta_i}{\sigma R_2 + \tau S_2} + \frac{\Lambda_3^2 \gamma_i}{\sigma R_3 + \tau S_3} + \frac{\Lambda_4 \mathfrak{J}_i}{\sigma \psi_1 + \tau \psi_2} \quad (i=1, \dots, 4)$$

e sono queste le richieste •.

**Matematica.** — *A proposito di una Memoria sulle linee geodetiche del sig. G. Königs.* Nota del prof. GREGORIO RICCI, presentata dal Corrispondente PADOVA.

• Negli « Annali della Facoltà di Scienze di Tolosa » è apparso recentemente un riassunto della Memoria del sig. Königs sulle linee geodetiche, che l'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia ha ritenuta degna del premio Bordin. Avendo io in questi Rendiconti (1) resi di pubblica ragione i risultati delle mie ricerche sullo stesso argomento, mi permetto ora di aggiungere alcune osservazioni dirette principalmente a porre in rilievo la concordanza di alcuni risultati fondamentali comuni ai due lavori.

• Il sig. Königs si propone di determinare sotto la forma

$$1) \quad \int f(x+y) + g(x-y) \{ dx dy$$

tutti gli elementi lineari di superficie, pei quali la equazione delle geodetiche ammette più integrali primi quadratici; o, che è lo stesso, che sono capaci di più di una riduzione alla forma di Liouville, e giunge alle seguenti conclusioni:

• 1.° La equazione delle geodetiche non ammette mai più di cinque integrali primi quadratici indipendenti, e questo numero è raggiunto soltanto per le superficie a curvatura costante.

• 2.° Il numero degli integrali primi quadratici indipendenti della equazione delle geodetiche non può mai essere eguale a quattro.

• 3.° Il numero stesso è eguale a tre soltanto per gli elementi lineari, che appartengono ad una classe di superficie di rivoluzione, pei quali l'esi-

(1) Seduta del 22 gennaio 1893.

stenza appunto di tre integrali primi quadratici indipendenti della equazione delle geodetiche era già stata dimostrata dal sig. Darboux.

« 4.° Esistono degli elementi lineari, che vengono determinati dall'autore sotto la forma (1), pei quali la equazione delle geodetiche ammette due e non più integrali primi quadratici indipendenti.

« Poichè dalla possibilità di ridurre e dalla effettiva riduzione di un elemento lineare di superficie alla forma di Liouville dipende la soluzione di alcuni importanti problemi (come il riconoscere se una equazione di 2° ordine ad invarianti uguali è armonica, e la integrazione delle equazioni delle geodetiche con semplici quadrature) io mi proposi di stabilire le conclusioni necessarie e sufficienti perchè un elemento lineare *dato sotto forma qualunque* sia riducibile *mediante uno o più sistemi coordinati* alla forma di Liouville e, nel caso affermativo, di determinare tutti i sistemi di Liouville, di cui esso è dotato e trovai:

« 1.° che non vi sono superficie, per cui l'ordine di infinito del numero dei sistemi di Liouville sia maggiore di quattro e che questo numero si raggiunge soltanto nel caso delle superficie a curvatura costante;

« 2.° che non esistono superficie dotate di un numero  $\infty^3$  di sistemi di Liouville;

« 3.° che le superficie dotate di un numero  $\infty^2$  di sistemi di Liouville sono applicabili sopra superficie di rivoluzione.

« Di più ho stabilite le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza dei sistemi di Liouville e dati i metodi per determinarli nei casi seguenti:

« 4.° che il numero dei sistemi stessi sia semplicemente infinito;

« 5.° che esista un solo sistema di Liouville, risultando anche dai miei metodi ciò, che era già stato dimostrato dal sig. Darboux, che cioè per un dato elemento lineare il numero dei sistemi di Liouville, se non è infinito, non può essere maggiore di uno.

« Per riconoscere il perfetto accordo tra i risultati 1°, 2°, 3° e 4° del sig. Königs ed i miei contrassegnati dagli stessi numeri d'ordine basta osservare che il Königs, assumendo la espressione del  $ds^2$  sotto la forma

$$\lambda dx dy,$$

prende come punto di partenza la nota equazione del sig. Darboux

$$D) \quad 2X \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + 3X' \frac{d\lambda}{dx} + X'' \lambda = 2Y \frac{d^2 \lambda}{dy^2} + 3Y' \frac{d\lambda}{dy} + Y'' \lambda,$$

ogni soluzione della quale, purchè X ed Y siano amendue differenti da 0, conduce ad un sistema ( $uv$ ) di Liouville col porre

$$3) \quad 2u = \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad 2iv = \int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int \frac{dy}{\sqrt{Y}};$$

che in ogni caso le soluzioni generali (XY) della equazione (D) sono funzioni *lineari ed omogenee* di un certo numero di costanti arbitrarie e che

secondo il Königs, questo numero non può mai superare cinque nè essere eguale a quattro, ed è rispettivamente eguale a cinque, tre e due nei casi 1°, 3° e 4°. In questi medesimi casi il numero delle costanti arbitrarie *essenzialmente distinte* contenute nei secondi membri delle (2), quando  $u$  e  $v$  si riguardino come costanti, è dunque eguale rispettivamente a quattro, tre ed uno e non può mai essere eguale a tre, nè maggiore di quattro.

« Il 5° caso da me considerato non rientra nel problema risolto dal Königs; mentre ha una speciale importanza dal punto di vista, nel quale io mi sono posto, poichè è il solo, in cui il sistema doppio di Liouville risulta determinato in termini finiti e la riduzione dell'elemento lineare proposto alla forma di Liouville dipende da semplici quadrature. Mi permetterò in fine di osservare come, avendo completamente risolto il problema propostomi, ho anche stabilite le equazioni, che caratterizzano gli elementi lineari corrispondenti ai casi 3° e 4° sotto forma assoluta cioè indipendente da ogni ipotesi sulla forma della loro espressione ».

**Chimica Fisica.** — *Sulla dissociazione elettrolitica in relazione col potere rotatorio ottico.* Nota di G. CARRARA presentata dal Corrispondente R. NASINI (1).

« Le relazioni esistenti fra il potere rotatorio e la dissociazione elettrolitica si possono, secondo W. Nernst, riassumere così: Sali che contengono un ione otticamente attivo debbono avere potere rotatorio uguale quando si trovano allo stato di completa dissociazione in soluzioni equivalenti (2).

« La teoria della dissociazione elettrolitica considerando le proprietà degli elettroliti in soluzione come principalmente additive troverebbe in ciò un valido appoggio. Difatti se veramente i sali aventi un ione otticamente attivo sono dissociati in soluzione, il loro potere rotatorio specifico dovrà essere proporzionale al numero di ioni liberi attivi e perciò al grado di dissociazione elettrolitica della soluzione. Si arriva così alla conseguenza, che si ammette essere confermata dall'esperienza; che i sali di uno stesso acido attivo aventi un ione comune attivo debbono avere lo stesso potere rotatorio quando si esaminino in soluzioni equimolecolari e che il grado di dissociazione elettrolitica sia uguale, come del resto è quasi sempre per i sali. Lo stesso è a dirsi per i sali formati da una base attiva con acidi diversi.

« I primi lavori che misero in evidenza una certa analogia nel compor-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Padova.

(2) W. Nernst, *Theoretische Chemie* ecc. pag. 322.