ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 1 ottobre 1893.

Matematica. — *Sulle equazioni modulari.* Nota del Socio F. Brioschi.

« 1°. Il terzo volume del *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* di Halphen, rimasto incompiuto per l'immatura morte dell'autore, contiene alcune pagine che portano il titolo: *Fragments relatifs à la transformation*, nelle quali l'eminente analista ritornando più volte sul calcolo delle equazioni modulari, fa conoscere i vari tentativi da lui escogitati per risolvere colla maggiore generalità l'importante problema.

« Fra questi tentativi, tutti degni di studio, pare a me, che alcuni (pag. 212, 265) meritino in modo speciale di essere posti in luce e completati. Questo è lo scopo del presente scritto.

« 2°. In una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, del mese di novembre (1874) ed in una susseguente del gennaio (1891), ho fatto conoscere che posto:

$$(1) \qquad \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

essendo $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$; $\psi(y) = 4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3$; la formola di trasformazione di ordine n, numero primo, è la seguente:

$$(2) \qquad y = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}^2}.$$

« In essa U è un polinomio in x del grado n, T un polinomio del grado $\nu = \dfrac{n-1}{2}$; e ponendo:

$$\mathrm{T} = x^\nu + \nu a_1 x^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2} a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_\nu$$

si ha:

(3) $$\mathrm{U} = [nx + (n-1)a_1]\mathrm{T}^2 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\mathrm{T}\mathrm{T}' - \varphi(x)(\mathrm{T}\mathrm{T}'' - \mathrm{T}'^2)$$

in cui

$$\mathrm{T}' = \frac{d\mathrm{T}}{dx}, \quad \mathrm{T}'' = \frac{d^2\mathrm{T}}{dx^2}.$$

« Che inoltre ponendo:

$$\mathrm{V} = [(2n+1)x + 2(n-1)a_1]\mathrm{U}^2 - \tfrac{1}{2}\varphi'\mathrm{U}\mathrm{U}' - \varphi(x)(\mathrm{U}\mathrm{U}'' - \mathrm{U}'^2)$$

si aveva identicamente:

$$\mathrm{V} - x\mathrm{U}^2 + \tfrac{1}{2}\gamma_2\mathrm{U}\mathrm{T}^2 + \gamma_3\mathrm{T}^4 = 0$$

della quale equazione potevasi dedurre una serie di relazioni fra i coefficienti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ del polinomio T e le γ_2, γ_3; e da queste la equazione modulare per mezzo di eliminazioni. Le formole ottenute in questo modo sono alquanto complicate, ed il sostituire nelle formole stesse ai coefficienti del polinomio T, la somma delle potenze delle radici dell'equazione $\mathrm{T} = 0$, come fece Halphen, serve a semplificarlo e ad agevolare di qualche poco il calcolo delle equazioni modulari.

« 3°. Sostituendo nella equazione (2) il valore (3) di U, si ottiene:

$$y = nx - 2s_1 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} - \varphi(x)\left(\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\right)'$$

essendo $s_1 = -\nu a_1$. Ora indicando con s_m la somma delle potenze emmesime delle radici della equazione $\mathrm{T} = 0$, si ha che:

$$\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \sum_1^\infty{}_m \frac{s_{m-1}}{x^m}$$

e per ciò sarà:

$$y = nx - 2s_1 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)\sum_1^\infty{}_m \frac{s_{m-1}}{x^m} + \varphi(x)\sum_1^\infty{}_m \frac{m s_{m-1}}{x^{m+1}}.$$

Halphen dopo avere dato questa formola, osserva (pag. 266) che il termine costante nel secondo membro è:

$$-2s_1 - 6s_1 + 8s_1 = 0$$

che il coefficiente di x è:

$$n - 6s_0 + 4s_0 = 1 \quad \text{essendo} \quad s_0 = \frac{n-1}{2}$$

e che per ciò può scriversi:

(4) $$y = x + \sum_1^\infty{}_m \frac{\varrho_m}{x^m}$$

essendo:

(5) $$\varrho_m = 2(2m+1)s_{m+1} - \tfrac{1}{2}(2m-1)g_2 s_{m-1} - (m-1)g_3 s_{m-2}.$$

Trattasi ora di determinare quali relazioni devono sussistere fra i coefficienti ϱ_m perchè sia soddisfatta la equazione differenziale (1). Questa ricerca rimase incompiuta nel citato frammento.

« 4°. Dalla equazione (4) si deducono le seguenti:

$$y' = 1 - \sum_1^\infty{}_m \frac{m\varrho_m}{x^{m+1}}, \quad y'' = \sum_1^\infty{}_m \frac{m(m+1)\varrho_m}{x^{m+2}}, \quad y''' = -\sum_1^\infty{}_m \frac{m(m+1)(m+2)\varrho_m}{x^{m+3}}$$

mentre dalla (1) ossia dalla:

$$\text{(a)} \qquad \psi(y) = y'^2 \varphi(x)$$

si ottengono per successive derivazioni le:

$$\text{(b)} \qquad \psi'(y) = 2y'' \varphi(x) + y' \varphi'(x)$$

$$\text{(c)} \qquad \psi''(y)\, y' = 2y''' \varphi(x) + 3y'' \varphi'(x) + y' \varphi''(x).$$

Dall'eguagliare i termini costanti nei due membri delle equazioni (a) (b) si ottengono le relazioni:

$$12\varrho_2 - \gamma_3 = -g_3 - 16\varrho_2$$

da cui

$$28\varrho_2 = \gamma_3 - g_3$$

e:

$$24\varrho_1 - \gamma_2 = 16\varrho_1 - 12\varrho_1\, g_2$$

da cui:

$$20\varrho_1 = \gamma_2 - g_2.$$

« La (c) conduce infine alle due relazioni generali:

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} (2m-1)\left[(4m+5)\varrho_{2m+1} - \frac{1}{4}(4m-1)g_2\varrho_{2m-1} - (m-1)g_3\varrho_{2(m-1)}\right] - \\ \qquad - 3\varrho^2{}_m - 6\sum_1^m{}_s \varrho_{m-s}\varrho_{m+s} = 0 \\ m\left[(4m+7)\varrho_{2(m+1)} - \frac{1}{4}(4m+1)g_2\varrho_{2m} - \frac{1}{2}(2m-1)g_3\varrho_{2m-1}\right] - \\ \qquad - 3\sum_1^m{}_s \varrho_{m-s+1}\varrho_{m+s} = 0 \end{cases}$$

per $m = 1, 2, 3 \ldots$. Per $m = 1$ si hanno così le:

$$3\varrho_3 = \varrho_1{}^2 + \tfrac{1}{4} g_2 \varrho_1$$

$$11\varrho_4 = 3\varrho_1\varrho_2 + \tfrac{5}{4} g_2\varrho_2 + \tfrac{1}{2} g_3\varrho_1$$

formole già date da Halphen, ed i coefficienti $\varrho_3, \varrho_4, \varrho_5 \ldots$ si dimostrano quindi funzioni di $\varrho_1, \varrho_2, g_2, g_3$.

« 5°. Ciò posto ecco come le calcolazioni per la ricerca dell'equazione modulare possono essere agevolate da questi risultati. È noto che per una trasformazione dell'ordine n, questa equazione è del grado $n+1$, della forma seguente:

$$\xi^{n+1} + \alpha g_2 \xi^{n-1} + \beta g_3 \xi^{n-2} + \cdots = 0$$

essendo $\xi = s_1$ ed $\alpha, \beta, \ldots$ coefficienti numerici. Ora dalla relazione (5) deducesi, per la proprietà dimostrata rispetto ai coefficienti $\varrho_3, \varrho_4, \varrho_5 \ldots$, che le somme $s_2, s_3\ s_4 \ldots$ si possono esprimere in funzione di $\xi, \varrho_1, \varrho_2, g_2, g_3$. Ma è noto che le somme $s_{\nu+1}, s_{\nu+2}, s_{\nu+3}, \ldots$, sono funzioni delle $s_1, s_2, \ldots s_\nu$; e si arriva così a stabilire una serie di relazioni fra le $\xi, \varrho_1, \varrho_2, g_2, g_3$. Eliminando da tre di esse le ϱ_1, ϱ_2 si ottiene la equazione modulare.

« 6. Dalle equazioni (5) (6) si deducono facilmente i valori di $s_2, s_3, s_4 \ldots$ in funzione di $\varrho_1, \varrho_2, \xi$. Questi valori sono

$$6s_2 = \varrho_1 + \frac{n-1}{4} g_2, \qquad 10s_3 = \varrho_2 + \frac{n-1}{2} g_3 + \tfrac{3}{2} g_2 \xi$$

$$14s_4 = \tfrac{1}{3} \varrho_1^2 + \tfrac{1}{2} g_2 \varrho_1 + \frac{5(n-1)}{3.4^2} g_2^2 + 2g_3 \xi$$

$$18s_5 = \frac{3}{11} \varrho_1 \varrho_2 + \frac{3.17}{2.5.11} g_2 \varrho_2 + \frac{6}{11} g_3 \varrho_1 + \frac{3(n-1)}{2.5} g_2 g_3 + \frac{3.7}{5.8} g_2^2 \xi$$

$$22s_6 = \frac{1}{13} \varrho_2^2 + \frac{2}{3.13} \varrho_1^3 + \frac{3.5}{7.13} g_2 \varrho_1^2 + \frac{31}{5.13} g_3 \varrho_2 + \frac{751}{3.7.4^2.13} g_2^2 \varrho_1 +$$
$$+ \frac{3.5(n-1)}{7.4^3} g_2^3 + \frac{n-1}{5} g_3^2 + \frac{3.29}{2.5.7} g_2 g_3 \xi$$

e così di seguito.

« Per $n=5$ essendo s_3 funzione di s_1, s_2 dalle prime due delle equazioni superiori si otterrà una relazione fra $\varrho_1, \varrho_2, \xi$; così per $n=7$ dalle prime tre, ed infine per $n=11$ dalle cinque. Queste equazioni sono:

per $n=5$ $\qquad \varrho_2 - \tfrac{5}{2} \varrho_1 \xi + 5\xi^3 - g_2 \xi + 2g_3 = 0$

e per $n=7$ $\quad \dfrac{5}{12} \varrho_1^2 - \dfrac{28}{5} \varrho_2 \xi - \tfrac{1}{4} g_2 \varrho_1 - 7\xi^4 + 7\varrho_1 \xi^2 + \dfrac{21}{10} g_2 \xi^2 -$

$$- \frac{54}{5} g_3 \xi + \frac{9}{16} g_2^2 = 0$$

ma la complicazione dei coefficienti numerici pel caso di $n=11$ dimostra tosto che per questa via si giunge difficilmente al risultato.

« Posto $\xi = \dfrac{n-1}{2} z$, ossia $z = -a_1$ le note equazioni modulari per $n=5$, $n=7$, sono:

$$z^6 - \tfrac{5}{4} g_2 z^4 - 5g_3 z^3 - \frac{5}{16} g_2^2 z^2 - \tfrac{1}{4} g_2 g_3 z - \frac{5}{3^3.4^3} g_2^3 + \frac{5}{3^3.4^3} \delta = 0$$

$$z^8 - \tfrac{7}{3} g_2 z^6 - 14g_3 z^5 - \frac{5.7}{3.8} g_2^2 z^4 - \tfrac{7}{3} g_2 g_3 z^3 - \frac{5.7}{3^3.4^2} g_2^3 z^2 - \frac{1}{3.8} g_2^2 g_3 z -$$
$$- \frac{7}{3^4.4^4} g_2^4 + \frac{7^2}{3^6} \delta z^2 = 0$$

e l'equazione modulare per un valore qualunque di n, numero primo, ha la forma:

$$F(z) + \delta f(z) = 0$$

essendo $F(z)$ un polinomio del grado $n+1$, $f(z)$ del grado $n-5$; e $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

« 7°. Posto:

$$F(z) = z^{n+1} + A_1 z^n + A_2 z^{n-1} + A_3 z^{n-2} + \cdots A_{n+1}$$

i coefficienti A_1, A_2, $A_3 \dots A_{n+1}$ hanno i valori che si deducono dai seguenti:

$$A_1 = 0 \qquad 2rA_{2r} = -(n+1)\frac{n(n-1)\dots(n-2r+2)}{1.2.3\dots(2r-2)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^r$$

$$(2r+1)A_{2r+1} = -(n+1)\frac{n(n-1)\dots(n-2r+1)}{1.2.3\dots(2r-1)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^{r-1}\frac{g_3}{8}.$$

« Questi valori facilmente calcolabili col metodo indicato da Halphen negli indicati *Fragments divers* (p. 213) nella ipotesi di $\delta = 0$, risolvono nella sua generalità parte del problema, ma rimane intatta la ricerca della funzione $f(z)$. I polinomi $F(z)$ hanno proprietà analoghe ai polinomi delle formole di moltiplicazione, in quanto che quelli di grado superiore al quarto si possono esprimere in funzione dei polinomi di gradi inferiori. Per esempio indicando con φ_2, φ_3, $\varphi_4 \dots$ polinomi in z della stessa forma dei polinomi ψ_2, ψ_3, $\psi_4 \dots$ delle formole di moltiplicazione; le equazioni modulari sono:

$$\text{per } n = 3 \quad \varphi_3 = 0 \qquad \text{per } n = 5 \quad \varphi_4 - \frac{1}{32}\delta\varphi_2 = 0$$

e così via.

« 8°. Si indichino con x, x_1, $x_2 \dots x_{\nu-1}$ le radici della equazione $T(x) = 0$, sieno cioè:

$$x = \wp\left(\frac{2\omega}{n}\right),\ x_1 = \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right),\ x_2 = \wp\left(\frac{6\omega}{n}\right) \dots x_{\nu-1} = \wp\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)$$

si avrà:

$$z = \frac{2}{n-1}[x + x_1 + x_2 \dots + x_{\nu-1}]$$

Ora rammentando la formola (¹):

$$\wp(nu) = \wp(u) - \frac{\psi_{n-1}\,\psi_{n+1}}{\psi_n^2}$$

nella quale ψ_{n-1}, ψ_n, ψ_{n+1} sono polinomi in $\wp(u)$, si ha che z potrà esprimersi con quei polinomi in funzione di x. La ricerca della equazione modulare può quindi farsi dipendere da quella delle equazioni per la moltiplicazione.

« Consideriamo dapprima, per maggiore chiarezza, alcuni casi particolari. Sia $n = 5$; si ha:

$$z = \tfrac{1}{2}(x + x_1) \quad \text{ed} \quad x_1 = x - \frac{\psi_3}{\psi_2^2} \quad \text{essendo } \psi_1 = 1.$$

« Ma dai valori di ψ_2, ψ_3, ψ_4 si deduce che:

$$\psi_2^2\, x = \tfrac{1}{3}\psi_3 + \tfrac{1}{12}\frac{(\psi_4 + \psi_2^5)^2}{\psi_2^2\,\psi_3^2}$$

quindi:

$$z = \tfrac{1}{12}\frac{(\psi_4 + \psi_2^5)^2}{\psi_2^2\,\psi_3^2} - \tfrac{1}{6}\frac{\psi_3}{\psi_2^2} = \frac{1}{12\,\psi_2^2\,\psi_3^2}[(\psi_4 + \psi_2^5)^2 - 2\,\psi_3^3]$$

(¹) Halphen, Première Partie pag. 100-103.

e ponendo:

$$\psi_3 = h^{\frac{1}{3}}\,\psi_2^{\frac{2}{3}}, \quad \psi_4 = k\,\psi_2^{5}$$

si ha:

$$z = \frac{1}{12}\left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}\left[(k+1)^2 - 2h\right]$$

e siccome l'equazione della moltiplicazione $\psi_5 = 0$ è in questo caso:

$$k - h = 0$$

sarà infine:

$$z = \frac{1}{12}\left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}(h^2+1).$$

« Per $n = 7$ si avranno come sopra:

$$x = \frac{m}{12}\left[(k+1)^2 + 4h\right], \qquad x_1 = x - mh$$

posto $m = \left(\frac{\psi_2}{h}\right)^{\frac{2}{3}}$, inoltre:

$$x_2 = x - mk$$

e per queste:

$$z = \frac{1}{12}\,m\,(k-1)^2$$

essendo $\gamma_7 = 0$ ossia:

$$k^3 - hk + h^2 = 0.$$

« Per $n = 11$ oltre i valori superiori di x, x_1, x_2 si hanno:

$$x_3 = x - m\,\frac{h\,(k-h)}{k^2}, \qquad x_4 = x - m\,\frac{hk\,(k-h-k^2)}{(k-h)^2}$$

e fra le h, k sussiste la relazione $\gamma_{11} = 0$ ossia

$$hk\,(k^2 - k + h)^3 - (k-h)^3\,(k^3 - hk + h^2) = 0.$$

« Analogamente per qualsivoglia valore di n, la z si esprime in funzione di m, h, k e queste due ultime quantità sono legate da una equazione. Ora siccome i valori di g_2, g_3 si ponno facilmente esprimere in funzione di m, h, k eliminando dalle quattro relazioni così stabilite le quantità m, h, k si ottiene la equazione modulare.

« I valori di g_2, g_3 sono:

$$g_2 = \frac{m^2}{12}\left\{\left[(k+1)^2 + 4h\right]^2 - 24h\,(k+1)\right\}$$

$$g_3 = -\frac{m^3}{6^3}\left\{\left[(k+1)^2 + 4h\right]^3 - 36h\,(k+1)\left[(k+1)^2 + 4h\right] + 216h^2\right\}$$

e quindi:

$$\delta = - m^6 h^3\left[k\,(k+1)^3 + 8h\,(k+1)^2 - 36hk + 16h^2 - 9h\right]. \tag{7}$$

« 9°. La conoscenza del polinomio F(z) può agevolare la ricerca per le considerazioni seguenti:

« Posto $y = z - x$ si sostituisca alla z in quel polinomio $y + x$, si avrà:

$$(8)\quad F(z) = y^{n+1} + (n+1)\,c_1 y^n + \frac{(n+1)n}{2} c_2 y^{n-1} + \frac{(n+1)n\,(n-1)}{2.3} c_3\, y^{n-2} + \cdots + c_{n+1}$$

nella quale le c_1, c_2, c_3... sono funzioni di x dei gradi primo, secondo, terzo e così via.

« Dai valori di A_{2r}, A_{2r+1} stabiliti nel § 6° deducesi che rappresentando c_s col polinomio:

$$c_s = x^s + B_2\, x^{s-2} + B_3\, x^{s-3} + \cdots + B_s$$

i coefficienti B_2, B_3... hanno i valori:

$$2r B_{2r} = -\frac{s(s-1)\ldots(s-2r+1)}{1.2\ldots(2r-2)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^r$$

$$(2r+1)\,B_{2r+1} = -\frac{s(s-1)\ldots(s-2r)}{1.2\ldots(2r-1)}\left(\frac{g_2}{3.4}\right)^{r-1}\frac{g_3}{8}$$

quindi:

$$c_1 = x\,,\quad c_2 = x^2 - \frac{1}{12} g_2 \quad c_3 = x^3 - \tfrac{1}{4} g_2\, x - \tfrac{1}{4} g_3\,,$$

$$c_4 = x^4 - \tfrac{1}{2} g_2\, x^2 - g_3\, x - \frac{1}{48} g_2{}^2 \text{ ecc.}$$

« Ora queste funzioni, le quali non mutano per valori diversi di n, si ponno esprimere facilmente in funzione di m, h, k; e si hanno i valori:

$$c_1 = \frac{m}{12}[(k+1)^2 + 4h] \quad c_2 = \frac{m^2}{6} h\,(k-1) \quad c_3 = \frac{m^3}{4} h^2 \quad c_4 = \frac{m^4}{3} h^3$$

$$c_5 = \frac{m^5}{12} h^3 (k^2 + k + 4h) \quad c_6 = \frac{m^6}{2} h^4 k - \frac{1}{2.3^3}\delta \quad c_7 = \frac{m^7}{12} h^4 [k(k+1)^2 + 4hk - h] - \frac{5}{3.4^3}\delta c_1$$

$$c_8 = \frac{m^8}{3} h^5 [k^2 + k - h] - \frac{1}{3^3}\delta\,(3c_1{}^2 + 2c_2)$$

e così di seguito.

« I valori di y risultano in conseguenza:

per $n = 5$ $\qquad y = -\frac{m}{2} h$ $\qquad$ per $n = 7$ $\qquad y = -\frac{m}{3}(h + k)$

per $n = 11$ $\qquad y = -\frac{m}{5}\left[h + k + \frac{h\,(k-h)}{k^2} + \frac{hk\,(k - h - k^2)}{(k-h)^2}\right].$

« 10°. Nel primo caso di $n = 5$, sostituendo nella (8) i valori di c_1, c_2... ed il corrispondente di y, rammentando essere $k = h$, si ha:

$$F(z) = -\frac{1}{4^3} m^6 h^5 (h^2 + 11h - 1) - \frac{1}{2.3^3}\delta$$

ma il valore di δ (7) è in questo caso:

$$\delta = -m^6 h^5 (h^2 + 11h - 1)$$

quindi

$$F(z) = -\frac{5}{3^3 . 4^3}\delta$$

da cui l'equazione modulare

$$F(z)+\frac{5}{3^3.4^3}\delta=0.$$

« 11°. I coefficienti c_4, c_5, c_6... come la quantità g_2, g_3, δ e le h, k, m, possono esprimersi in funzione di c_1, c_2, c_3. Si hanno infatti le:

$$c_4=4c_1c_3-3c_2^2,\quad c_5=3c_1c_4-2c_2c_3,\quad c_6+\frac{1}{2.3^3}\delta=9c_2c_4-8c_3^2$$

$$c_7+\frac{5}{3.4^3}\delta c_1=6c_2c_5-5c_3c_4,\quad c_8+\frac{1}{3^2}\delta c_1^2=4c_2c_6-3c_4^2$$

inoltre:

$$g_2=12(c_1^2-c_2),\quad g_3=-4(2c_1^3-3c_1c_2+c_3)$$

da cui:

$$\delta=3^3.4^2[3c_1^2c_2^2+6c_1c_2c_3-4c_1^3c_3-4c_2^3-c_3^2]$$

ed infine:

$$m=\frac{4^3}{3^2}\frac{c_3^3}{c_4^2},\quad h=\frac{3^3}{4^4}\frac{c_4^3}{c_3^4},\quad k=\frac{9c_2c_4-8c_3^2}{8c_3^2},$$

e la $F(z)$ diverrà così una funzione delle c_1, c_2, c_3. Calcolata questa funzione, la equazione:

$$F(z)+\delta f(z)=0$$

e la equazione corrispondente della moltiplicazione condurranno al valore di $f(z)$ e quindi all'equazione modulare.

« 12. Nelle formole precedenti si è posto:

$$\wp'(u)=-\psi_2$$

per conformarci alla notazione di Halphen; ma dimostrasi essere in generale:

$$\wp'(nu)=(-1)^{n-1}\frac{\psi_{2n}}{\psi_n^4}.$$

« Questa formola conduce a stabilire la relazione esistente fra le equazioni modulari denominate Jacobiane e le equazioni della moltiplicazione. Infatti, indicando con v la radice di una delle prime equazioni, è noto essere:

$$\gamma^{\frac{n-1}{4}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}v^6\,\Pi\,\wp'^2\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)\quad(\alpha=1,\,2,\ldots\nu).$$

« Supponendo, per esempio, $n=5$, trovasi essere:

$$v^6=-\frac{h^2+11h-1}{h}$$

e siccome pei valori dati sopra per g_2, δ, si ha:

$$12\frac{g_2}{\gamma^{\frac{1}{3}}}=-\frac{h^4+12h^3+14h^2-12h+1}{h^{\frac{5}{3}}(h^2+11h-1)^{\frac{1}{3}}}$$

si ottiene la nota equazione:

$$v^{12}+10v^6-12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}}v^2+5=0$$

la quale può considerarsi siccome conseguenza della $k=h$ della moltiplicazione ».