ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 15 ottobre 1893.

Matematica. — *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Nota di GUIDO CASTELNUOVO, presentata dal Corrispondente C. SEGRE.

« Se le coordinate di un punto generico di una superficie F sono funzioni razionali di due parametri α, β, allora ad ogni punto generico (α, β) di un piano corrisponde un solo punto di F, ma ad ogni punto di F possono corrispondere *uno* o *più* punti del piano. Nel primo caso la F è rappresentabile biunivocamente sul piano, è (come diremo brevemente) una superficie *razionale*. Nel secondo caso esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di F ed ∞^2 gruppi di un certo numero $n(\geqq 2)$ di punti nel piano (α, β), gruppi dotati della proprietà che un punto generico del piano appartiene ad uno e ad uno solo di essi; la F si può rappresentare sopra una *involuzione piana* I *di ordine n*. Ora si può chiedere: *È possibile anche in questo secondo caso di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di* F *ed i punti di un piano?* O in altre parole: *una involuzione piana d'ordine n è razionale?* Le ricerche fatte finora per le involuzioni d'ordine 2 non esaurivano completamente la questione, tuttavia (offrendo la traccia per una trattazione rigorosa) autorizzavano a dare una risposta affermativa nel caso $n = 2$. Ma nessun risultato importante si era ottenuto per i valori superiori di n, (fatta eccezione per quelle involuzioni *cicliche* che provengono da una trasformazione birazionale ciclica del piano).

« Essendomi occupato recentemente dell'argomento, sono riuscito a dimostrare che in fatto *ogni involuzione piana* (d'ordine qualsiasi) *è razionale.* Il metodo che ho seguito sarà esposto brevemente in questa Nota; per le dimostrazioni diffuse dei teoremi qui enunciati, e per le notizie bibliografiche, rimando il lettore ad un lavoro più esteso che sarà pubblicato in seguito.

« Sia F una superficie i cui punti corrispondono biunivocamente ai gruppi di una involuzione I; noi dobbiamo dimostrare che F è razionale. Ad ogni curva di F corrisponde sul piano di I una curva la quale contiene ∞^1 gruppi di I, *curva* (come diremo) *appartenente alla involuzione* I; e ad ogni sistema lineare di curve su F corrisponde nel piano un *sistema lineare* (di curve) *appartenente alla* I. La geometria *sulla* superficie F è intimamente legata colle proprietà dei sistemi lineari di curve che ad essa appartengono. Ora i più importanti caratteri di un sistema lineare $|\Gamma|$ di curve su F sono: la dimensione r del sistema, il genere π della curva generica Γ (o *genere* del sistema), il *grado* Δ *del sistema* che è il numero delle intersezioni variabili di due curve Γ generiche; ed un ente che va sempre considerato insieme con un sistema lineare $|\Gamma|$ (perchè invariabilmente collegato col sistema) è la *serie* (lineare di gruppi) *caratteristica* g_{Δ}^{r-1} segata sopra una curva generica del sistema dalle rimanenti. Se diciamo *normale* un sistema $|\Gamma|$, quando non esiste un sistema di dimensione superiore ma dello stesso grado Δ il quale contenga tra le sue curve le curve di $|\Gamma|$, è chiaro che la nostra attenzione dovrà sopratutto rivolgersi ai sistemi normali giacenti su F, poichè conosciuti questi, tutti gli altri sistemi (non normali) si possono ritener come noti.

« Ora una proprietà fondamentale di un sistema *normale* (cioè determinato completamente dai punti base) giacente sopra un *piano* (o sopra una superficie razionale) è che *la serie caratteristica del sistema è completa.* Si è quindi indotti ad esaminare in primo luogo se altrettanto accada sulla nostra superficie F, e si trova precisamente il

« *Teorema I°.* — Ogni sistema lineare normale giacente sulla F ha la serie caratteristica completa.

« Il teorema non è certo sufficiente per dimostrare la razionalità della F, poichè anzi tutte quelle superficie che si sogliono considerare come regolari (superficie generali di genere > 0), godono la stessa proprietà; all'incontro le superficie anomale, ad es., le superficie per cui i due generi aritmetici e geometrici sono distinti, tra le quali le rigate irrazionali, non ammettono quella proprietà.

« Ma si può fare una seconda osservazione: nel piano esistono (come è noto) sistemi lineari normali i quali hanno la dimensione r superiore al genere π (sistemi per cui la serie caratteristica è certo non speciale); accadrà altrettanto sulla F? Orbene si dimostra il

« *Teorema II°.* — Sulla F esiste un sistema lineare (normale), il quale ha la dimensione superiore al genere; anzi in infiniti modi si possono costruire sistemi di tal natura su F [1].

« La proprietà contenuta in questo teorema spetta veramente anche alle superficie rigate irrazionali, ma non appartiene alle superficie di genere superiore a zero. Siamo quindi indotti a chiederci se le proprietà espresse dai teoremi I° e II° siano sufficienti per dimostrare la razionalità della superficie F; questione interessante per sè, anche indipendentemente dal problema sulle involuzioni. In realtà, quelle due proprietà sono sufficienti.

« Indichiamo da ora in poi con $|\Gamma|$ quel (o meglio *un*) sistema lineare di curve su F, avente la dimensione r superiore al genere π, sistema di cui il teor. II° afferma l'esistenza; la serie caratteristica del sistema essendo completa (teor. I°) e non speciale, il grado del sistema sarà $\Delta = \pi + r - 1$. Ora per i primi valori di $\pi = 0, 1, 2$ si riconosce direttamente che la superficie F è *razionale*.

[1] Un cenno sulla dimostrazione dei due teoremi. Considerando la trasformazione $(n-1, n-1)$ che una involuzione I determina nel proprio piano, trasformazione per la quale un punto generico si muta negli $n-1$ punti del suo gruppo (mentre certi punti eccezionali, *fondamentali*, hanno infiniti trasformati), si osserva subito che *due curve, le quali abbiano lo stesso ordine e si comportino ugualmente nei punti fondamentali di* I, *vengono trasformate in due curve di uno stesso ordine, che si comportano in uno stesso modo nei punti fondamentali.* Di qua segue che *se un fascio di curve contiene due curve appartenenti alla involuzione* I, *allora la curva generica del fascio* (ha come trasformata l'insieme di $n-1$ curve del fascio stesso e quindi *o*) *appartiene alla involuzione, oppure la involuzione è ciclica;* il teorema si estende subito ai sistemi lineari più ampli. Con una lieve modificazione del ragionamento si dimostra poi che *se in un fascio di curve, il quale contiene una curva appartenente alla involuzione* I, *quei punti base che non cadono tra i punti fondamentali di* I, *costituiscono uno o più gruppi della involuzione, allora od ogni curva del fascio appartiene ad* I, *oppure un'altra sola curva del fascio appartiene ad* I, *e la* I *in tal caso è ciclica.* Ora si consideri sul piano di I un sistema lineare $\infty^r|C|$ appartenente alla I, il quale non sia contenuto in un sistema lineare più vasto di curve aventi quell'ordine e quelle molteplicità (nei punti base) e tutte appartenenti ad I. La serie caratteristica di $|C|$ ha i suoi gruppi costituiti da un certo numero Δ di gruppi di I, è una $g^{r-1}_{n\Delta}$; fondandosi sul lemma precedente, si dimostra che la serie stessa non è contenuta in una serie $g^{r+h-1}_{n\Delta}$ $(h > 0)$ i cui gruppi si compongano pure di Δ gruppi di I; e questo fatto non differisce da quello che è affermato nel teorema I°.

Quanto al teorema II°, si considerino nel piano di I le curve R′ che sono le trasformate delle rette R; le ∞^2 curve $R + R'$ appartengono alla involuzione. Ora tutte le curve che hanno l'ordine di $R + R'$, che si comportano come queste nei punti fondamentali di I, e che appartengono alla I, formano un sistema lineare al quale corrisponde sulla superficie F (imagine di I) un sistema lineare avente il genere π uguale alla *classe* di I (numero delle coppie di punti coniugati in I appartenenti ad una retta), e la dimensione uguale a $\pi + k + 2$, dove k è l'ordine della curva unita di I. L'esistenza di un siffatto sistema è appunto affermata dal teorema II°.

« Se $\pi > 2$ si ricorre ai seguenti teoremi:

« *Teorema III°.* — La presenza del sistema $|\Gamma|$ su F porta con sè l'esistenza di un sistema $\infty^{\pi-1}|\Gamma'|$ (aggiunto a $|\Gamma|$) il quale sega sopra ogni curva Γ la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

« *Teorema IV°.* — Se la curva generica Γ' del sistema aggiunto è irriduttibile, il suo genere π' è $\leqq \pi - 2$; il sistema aggiunto (come il sistema primitivo) è normale, ed ha la dimensione superiore al genere $(\pi - 1 > \pi')$.

« *Teorema V°.* — Se la curva generica Γ' si spezza, lo spezzamento avviene in $\pi - 1$ curve razionali appartenenti ad un sistema lineare ∞^1 (¹).

« I tre teoremi ora enunciati danno un metodo di *riduzione* per dimostrare che la F è razionale. Infatti costruito il sistema $|\Gamma'|$ aggiunto a $|\Gamma|$, se Γ' è riduttibile, si può subito concludere in virtù del teor. V°, che la F è razionale; se Γ' è irriduttibile, il sistema $|\Gamma'|$ (per il teor. IV°) ha le stesse proprietà di $|\Gamma|$, ma intanto ha il genere $\pi' \leqq \pi - 2$. Ora se $\pi' = 0, 1, 2$ la F è razionale; se no si costruisca il sistema $|\Gamma''|$ aggiunto a $|\Gamma'|$, al quale sarà applicabile il teor. V° o il teor. IV°; e così via. Dopo un numero finito di operazioni si arriva certo a concludere che

« *Torema VI°.* — È razionale una superficie sulla quale ogni sistema lineare normale di curve ha completa la serie caratteristica, e sulla quale esiste inoltre un sistema lineare di dimensione superiore al genere.

(¹) Dei tre teoremi qui riuniti il primo è il più importante; ne abbozzerò qui la dimostrazione, limitandomi al caso in cui le ∞^{r-1} curve di $|\Gamma|$ passanti per un punto generico di F non hanno in comune altri punti variabili col primo (nel caso opposto si ricorre alla rappresentazione sopra una superficie multipla). Costruita nello spazio S_r a r dimensioni una superficie d'ordine $\pi + r - 1$ riferita univocamente ad F, in guisa che alle curve Γ di F corrispondano le sezioni della superficie cogli spazi S_{r-1}, si proietti la superficie da $r - 3$ suoi punti sullo spazio ordinario S_3. La proiezione sarà una superficie F_0 d'ordine $\pi + 2$ a sezioni piane di genere π. Ogni sezione piana ammette $\infty^{\pi-1}$ curve aggiunte d'ordine $\pi - 1$, ed una tra queste si può fissare assegnandone le $\pi - 1$ intersezioni con una retta s. Facciamo ora ruotare il piano della sezione intorno ad s, ed in ogni sua posizione costruiamo la curva aggiunta che passa per quei $\pi - 1$ punti fissati su s. Le ∞^1 curve d'ordine $\pi - 1$ che così si ottengono, formano, come si dimostra subito, una superficie d'ordine $\pi - 1$ la quale sega F_0 (oltre che lungo la curva multipla di F_0) in una curva Γ'_0 d'ordine $2\pi - 2$. Variando quei $\pi - 1$ punti su s, la curva Γ'_0 varia descrivendo un sistema lineare $\infty^{\pi-1}$; il quale si vede esser proiezione di un sistema $\infty^{\pi-1}$ di curve Γ' d'ordine $2\pi - 2$ giacenti sulla superficie di S_r. Le curve Γ' segano evidentemente sulla curva sezione di questa superficie (con un S_{r-1} generico) la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$; donde segue il teorema III°.

« Ed in conseguenza:

« Ogni involuzione piana è razionale.

« O sotto altra forma:

« Ogni superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri, è rappresentabile punto per punto sopra un piano.

« A proposito delle involuzioni piane noterò ancora che il procedimento qui esposto non conduce a determinarne i *tipi irriduttibili*, i quali si possono considerare come noti solo per $n = 2$, o più in generale per le involuzioni cicliche.

« Si riesce invece a stabilire varie proprietà proiettive delle involuzioni riguardanti la *classe*...; darò, come esempio, la prima che si presenta.

« *Ogni involuzione di classe* 0 *è di Jonquières* (coi gruppi allineati sulle rette di un fascio) *oppure è generabile mediante una rete di coniche* (due coniche segandosi in un gruppo, quindi in tal caso $n \leqq 4$) ».

Fisica. — *Sulle recenti esperienze di G. A. Hirn e sulle leggi dell'efflusso dei gas.* Nota (sunto di Memoria) del dott. Alessandro Sandrucci, presentata dal Socio P. Blaserna.

« Scopo del mio lavoro è:

« 1°. Esporre le condizioni in cui si trovano ai giorni nostri gli studi intorno alle leggi su l'efflusso dei gas, specialmente riguardo alle controversie ed alle polemiche sorte di recente fra gli scienziati.

« 2°. Sottoponendo le ben note esperienze di Hirn sull'argomento, ad una accurata critica, mostrare come i loro risultati, contrariamente all'opinione dell'autore, non riescano ad infirmare la validità dell'equazione notissima del Weissbach, nè dei principî più importanti della termodinamica.

« 3°. Resa evidente la imprecisione delle formule usate da Hirn per applicare i risultati delle sue esperienze (nella quale è riposta una delle cause dei disaccordi con la teoria), cercare relazioni più rigorose e fornire quindi un substrato teorico a chi volesse imprender di nuovo il lavoro sperimentale di Hirn, per istituire confronti, esenti da possibili critiche, coi dati sperimentali.

« Mi sono in queste ricerche giovato del seguente materiale bibliografico:

Weissbach, *Ingenieur-und Maschinenmechanik* (3ª ediz. Brunswich, 1855).

— *Risultati di esperienze su l'efflusso dell'aria e dell'acqua sotto una forte pressione* (Civilingenieur, t. V, pag. 1).

Bauschinger, *Teoria dell'efflusso dei gas perfetti* (Giornale di Matematica e Fisica di Schlömilch, t. VIII, pag. 81).