

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

- « Ed in conseguenza :
- « Ogni involuzione piana è razionale.
- « O sotto altra forma :
- « Ogni superficie il cui punto generico abbia le coordinate funzioni razionali di due parametri, è rappresentabile punto per punto sopra un piano.
- « A proposito delle involuzioni piane noterò ancora che il procedimento qui esposto non conduce a determinarne i *tipi irriducibili*, i quali si possono considerare come noti solo per  $n = 2$ , o più in generale per le involuzioni cicliche.
- « Si riesce invece a stabilire varie proprietà proiettive delle involuzioni riguardanti la *classe* . . . ; darò, come esempio, la prima che si presenta.
- « Ogni involuzione di classe 0 è di *Jonquières* (coi gruppi allineati sulle rette di un fascio) oppure è generabile mediante una rete di coniche (due coniche segandosi in un gruppo, quindi in tal caso  $n \leq 4$  ).

**Fisica.** — *Sulle recenti esperienze di G. A. Hirn e sulle leggi dell'efflusso dei gas.* Nota (sunto di Memoria) del dott. ALESSANDRO SANDRUCCI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

- « Scopo del mio lavoro è :
- « 1°. Esporre le condizioni in cui si trovano ai giorni nostri gli studi intorno alle leggi su l'efflusso dei gas, specialmente riguardo alle controversie ed alle polemiche sorte di recente fra gli scienziati.
- « 2°. Sottoponendo le ben note esperienze di Hirn sull'argomento, a una accurata critica, mostrare come i loro risultati, contrariamente all'opinione dell'autore, non riescano ad infirmare la validità dell'equazione notissima del Weissbach, nè dei principi più importanti della termodinamica.
- « 3°. Resa evidente la imprecisione delle formule usate da Hirn per applicare i risultati delle sue esperienze (nella quale è riposta una delle cause dei disaccordi con la teoria), cercare relazioni più rigorose e fornire quindi un substrato teorico a chi volesse imprendere di nuovo il lavoro sperimentale di Hirn, per istituire confronti, esenti da possibili critiche, coi dati sperimentali.

« Mi sono in queste ricerche giovato del seguente materiale bibliografico:

Weissbach, *Ingenieur- und Maschinenmechanik* (3<sup>a</sup> ediz. Brunswick, 1855).

— *Risultati di esperienze su l'efflusso dell'aria e dell'acqua sotto una forte pressione* (Civilingénieur, t. V, pag. 1).

Bauschinger, *Teoria dell'efflusso dei gas perfetti* (Giornale di Matematica e Fisica di Schlömilch, t. VIII, pag. 81).

- Saint-Venant e Wantzel, *Mémoires et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pression considérables* (Journal de l'École Polytechnique, 27<sup>e</sup> Cahier).
- Zeuner, *Théorie Mécanique de la Chaleur* (Paris, 1869).
- *Das Locomotivenblasrohr* (Zurich, 1863).
- Grashof, *Sul movimento permanente dei gas nei condotti e nei canali* (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, t. VII, pag. 243).
- G. A. Hirn, *Récherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température* (Mémoires de l'Académie de Belgique, 1855).
- *Récherches expérimentales sur la limite de la vitesse que prend un gaz quand il passe d'une pression à une autre plus faible* (Annales de Chimie et Physique, 6<sup>e</sup> série, t. VII, mars 1886).
- *La Cinétique moderne et le Dynamisme de l'Avenir* (Mémoires de l'Académie royale de Belgique, t. XLVI, 1886).
- *Réflexions sur une critique de M. Hugoniot parue aux Comptes Rendus du 28 Juin* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de France, t. CIII, séance 12 Juillet, 1886).
- *Remarques au sujet des Notes de M. Hugoniot insérées aux Comptes Rendus des 15 et 22 novembre* (Idem, séance 20 déc. 1886).
- Faye, *Remarques au sujet des récentes expériences de M. Hirn sur la vitesse d'écoulement des gaz* (C. R. de l'Acad. de France, séance du 2 novembre 1885).
- Hugoniot, *Sur l'écoulement des gaz dans les cas du régime permanent* (C. R. de l'Acad. 28 juin 1886).
- *Sur la pression qui existe dans la section contractée d'une veine fluide* (Idem, 2<sup>e</sup> sém., pag. 241).
- *Sur l'écoulement d'un gaz qui pénétre dans un récipient de capacité limitée* (Idem, pag. 922).
- *Sur un théorème relatif au mouvement permanent et à l'écoulement des fluides* (Idem, pag. 1179).
- *Sur l'écoulement des fluides élastiques* (Idem, pag. 1253).
- *Remarques relatives aux observations de M. Hirn sur l'écoulement des gaz* (Idem, 1887, pag. 46).
- Wilde, *Sulla velocità colla quale l'aria si precipita nel vuoto e su alcuni fenomeni relativi alla espansione di un gas a grande densità in un gas a densità minore* (Philosophical Magazine, vol. XX, 1885).
- Reynolds, *Su l'efflusso dei gas* (Idem, vol. XXI, 1886).
- Haton de la Goupillière, *Écoulement varié des gaz* (C. R. de l'Acad. des Sciences, 18 octobre 1886).
- *Idem*, (C. R. etc., 1886, pag. 785).
- Parenty, *Sur les expériences de M. G. A. Hirn concernant le débit des gaz à travers les orifices* (C. R. etc., 12 juillet 1886).
- *Sur la modification dans l'adiabatique d'une veine gazeuse contractée* (C. R. 7 déc. 1891).

« Tre sono i casi principali dell'efflusso dei gas attraverso orifizzii di assai piccole dimensioni. Uno, il più semplice, detto del regime permanente, si ha quando il gas nel recipiente d'uscita ed in quello di entrata (ambedue variabili di volume) si mantiene a pressioni costanti (ma diverse fra loro)

durante l'efflusso. Su questo ordinariamente ci si fonda per stabilire la formula di Weissbach, che dà la velocità del gas. Gli altri due casi del regime variato suppongono, costanti i volumi di ambedue i recipienti l'uno, e costante quello di un solo recipiente l'altro; quindi il primo considera le pressioni gassose in ambedue variabili, il secondo variabile solo quella nel recipiente di entrata.

« Dopo aver fatto un breve sunto storico delle ricerche sia teoriche che sperimentali eseguite fin'ora nello studio di questi 3 casi ed avere specialmente notato le controversie sorte fra l'Hirn ed il Clausius a proposito della teoria cinetica dei gas e fra Hirn e l'Hugoniot intorno alla relazione del Weissbach ed in generale alla termodinamica, passo a descrivere sommarariamente il metodo usato da Hirn nelle sue ultime esperienze su l'aria, per determinare la portata reale volumetrica al secondo nell'efflusso e quindi la velocità reale nel medesimo tempo. Hirn dai risultati sperimentali ricava conclusioni che possono brevemente compendiarsi così: Le portate sperimentali e quelle calcolate coll'equazione di Weissbach non concordano. Le prime, a cominciare dai valori più piccoli del rapporto  $\frac{p_1}{p_0}$  fra le pressioni ineguali nel recipiente di entrata e di uscita, si mantengono per un po' costanti, poi diminuiscono tendendo a zero. Le seconde, non solo si mantengono sempre minori delle reali, ma crescendo con  $\frac{p_1}{p_0}$ , passano per un massimo e quindi naturalmente decrescono. Più notevole disaccordo passa fra la velocità reale e quella calcolata: la prima per  $\frac{p_1}{p_0}$  infinitesimo è quasi infinita e decresce quindi rapidamente, mantenendosi sempre superiore alla corrispondente calcolata; la seconda ha un limite finito per  $\frac{p_1}{p_0} = 0$  e solo per valori di tal rapporto vicini assai ad 1 si mostra quasi eguale alla sperimentale. Da queste discordanze fra teoria ed esperienza si deduce l'inesattezza della equazione di Weissbach.

« Prima di passare, per difesa della termodinamica, alla critica di certi ragionamenti e delle esperienze di Hirn, io faccio osservare come il caso sperimentale hirniano non corrisponda esattamente a nessuno dei tre casi in principio esposti e fin'ora studiati. Infatti lo spostamento continuo del mercurio nella grande vaschetta del manometro durante l'efflusso del gas fa sì che il volume del recipiente di entrata non si possa considerare come costante durante la penetrazione del gas, ma, in certo modo, come una funzione della quantità del gas che entra o anche della variabile contropressione  $p_1$ . Questa circostanza è sfuggita fin'ora ai critici delle esperienze hirniane. Siccome Hirn, per calcolare la velocità teorica, fa uso della formula di Weissbach introducendovi i valori delle contropressioni sperimentalmente determinate,

e tale formula è stata costruita considerando l'efflusso a regime permanente, potrebbero nascer dei dubbi sulla validità dell'uso che Hirn fa di essa in un caso di efflusso variato non tanto semplice. Ma io dimostro analiticamente che l'espressione

$$V = \sqrt{2Eg c_p T_0 \left\{ 1 - \left( \frac{p_y}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right\}}$$

dove tutto è costante meno  $p_y$ , può considerarsi valida per qualsiasi caso di efflusso e come una funzione di  $p_y$  che conserva sempre la stessa forma comunque vari  $p_y$ . Rimane quindi giustificato l'uso che ne fa Hirn, sostituendovi per  $p_y$  i valori sperimentali della contropressione, dati dal manometro a mercurio.

« Un ragionamento speciale di Hirn, col quale egli crede provare non essere mai possibile l'eguaglianza fra la pressione nella parte più contratta della vena gassosa, dove egli pone il massimo di velocità, e la contropressione nel recipiente di entrata, mi dà agio con una lunga discussione critica di mostrare come esso non valga a provare quanto afferma il suo autore. Se questo non fosse, non si potrebbe più usare la formula di Weissbach per introdurre i valori sperimentali delle contropressioni allo scopo di determinare le velocità teoriche e la teoria di Hugoniot non sarebbe più vera. Di qui l'utilità della discussione e del suo risultato.

« Espongo quindi succintamente la teoria d'Hugoniot, come si ricava dalle numerose Note da lui pubblicate durante la sua polemica con Hirn, e da essa deduco in modo sintetico le conseguenze seguenti :

1<sup>a</sup>. Convien distinguere assolutamente la sezione contratta della vena da la sezione finale, nella quale soltanto esisterà il massimo di velocità. Le due sezioni possono coincidere, ma solo in una determinata fase dell'efflusso.

« 2<sup>a</sup>. Non è più sostenibile che la pressione nella parte più contratta della vena debba essere sempre diversa da quella del fluido contenuto nel recipiente di entrata (nè sempre a lei eguale). Anzi, nel caso in cui la contropressione iniziale risulta superiore a  $0,522 p_0$  si deve ritenere che la sezione contratta è anche la sezione finale, e quindi che nella sezione contratta l'eguaglianza tanto discussa da Hirn  $p_x = p_r$  sussiste completamente.

« 3<sup>a</sup>. Non si può più ammettere come costante il coefficiente di contrazione dell'orificio, poichè non rimane costante nell'efflusso variato la grandezza della sezione contratta della vena.

« Questi risultati sono completamente contrari ai principî ed alle ipotesi di Hirn. Di qui la polemica con l'Hugoniot. Io faccio però vedere con una minuta critica delle ragioni addotte da Hirn nella sua difesa, che egli non riesce vittorioso sulle obiezioni e sulle idee di Hugoniot, e che anzi mostra di non aver colto bene il punto di vista da cui il fisico francese parte per stabilire le critiche sue. Rimane quindi intatta la teoria d'Hugoniot. Ma essa

è in tutto concorde con l'esperienza? Mi occupo di rispondere a questa domanda e dopo accurato esame analitico sui valori che risultano dalla teoria d'Hugoniot per i coefficienti di contrazione nella vena là dove essa ha la sezione minima, paragonando due tavole di valori, l'una dedotta dalle esperienze preliminari di Hirn sui detti coefficienti, valide, come dimostro, anche secondo la teoria di Hugoniot, l'altra da l'equazione fondamentale di quest'ultimo, giungo a questi importanti risultati:

« 1°. Per i due primi orifici (fra i sei usati da Hirn) in sottile parete, il coefficiente di contrazione, calcolato nella parte dove abbiamo il minimo assoluto di sezione secondo Hugoniot, si mostra maggiore del medesimo coefficiente calcolato da Hirn nel caso in cui si è, secondo Hugoniot, lontani dal massimo assoluto di contrazione. V'ha in questo, contraddizione completa fra la teoria di Hugoniot e l'esperienza.

« 2°. I valori *critici* della contropressione (quelli cioè dopo i quali cessa la costanza della portata) rinvenuti da Hirn nelle sue esperienze e quelli  $\alpha p_0 = 0,522 p_0$  calcolati per ciascuna di dette esperienze secondo Hugoniot, si mostrano fra loro in disaccordo grandissimo.

« E quindi deduco le seguenti conseguenze:

« 1°. O i valori dati da Hirn per la portata in un secondo, quando essa mostrasi costante, sono inesatti (troppo grandi), in ispecie per le due prime esperienze.

« 2°. O la teoria di Hugoniot, che estende al caso di una vena finita le proprietà di un semplice filetto e pone  $p_x = \alpha p_0 = 0,522 p_0$  là dove nella vena è il massimo assoluto di contrazione, non è giusta, specialmente in riguardo ai casi dell'efflusso per orifici in piccola parete.

« Ritenendo implicitamente più probabile la prima conseguenza piuttosto che la seconda, deduco dalla teoria di Hugoniot altri corollari.

« 1°. Che nella fase in cui il minimo assoluto di sezione può aver luogo ad ogni istante in un certo punto della vena, cioè nel primo periodo dell'efflusso cominciante nel vuoto, questo valor minimo si mantiene per tutta la fase costante.

« 2°. Che, dopo il massimo di contrazione della vena, la sezione di lei e la velocità del fluido vanno crescendo, finchè la pressione nella vena non è divenuta eguale alla contropressione. E ciò è necessario ammettere, quando si debba ritenere valida la formula di Weissbach.

« 3°. Che durante il primo periodo di efflusso la sezione finale della vena non può rimanere costante, ma deve andare continuamente diminuendo col continuo accrescersi della contropressione.

« Ritornando poi sulle esperienze di Hirn, trovo altre cause del disaccordo notato da lui fra teoria ed esperienza, cause diverse da quelle messe in luce dagli altri critici. La determinazione dei volumi gassosi effluiti dal gasometro in un secondo e delle corrispondenti pressioni nell'altro recipiente,



ha grande importanza, perchè l'autore si serve di quei volumi per determinare la portata e la velocità reale del gas nell'efflusso e di quelle pressioni per porle via via nella formula di Weissbach allo scopo di paragonarne i risultati con gli sperimentali. Hirn calcola la quantità volumetrica di gas uscita in un secondo, dividendo per il tempo (2'',71) il volume uscito durante una completa oscillazione del pendolo misuratore degli spostamenti del gasometro e per ciò dei volumi. Ma durante l'entrata nel 2° recipiente di un volume qualsiasi di gas, anche per un secondo, la contropressione non rimane costante, essendo realmente nelle esperienze il regime continuamente variato; Hirn tuttavia considera come contropressione unica accompagnante l'entrata del gas in 1'' la pressione segnata dal manometro a mercurio alla fine di ogni oscillazione del pendolo. Ciò non è rigoroso. Lo sarebbe solo, dato che nell'intervallo di 2'',71 l'efflusso si mantenesse assolutamente permanente; e questo non è, quando la contropressione supera il suo valore critico. Questa imprecisione manifesta i suoi effetti, aumentati altresì, quando Hirn pone in uso la formula per determinare teoricamente la portata in volume nell'unità di tempo, poichè in essa introduce i valori della pressione dati dal manometro, che sono quelli della contropressione alla fine di ogni intervallo di 2'',71. Questa formula non può dare con precisione il volume uscito dal gasometro altro che nell'ipotesi che gli elementi  $dw$  del medesimo volume nel dilatarsi, abbiano dovuto passare *tutti* adiabaticamente da una pressione stessa  $p_0$  ed una  $p_1$  medesima; e questa ipotesi non è ammissibile ora, trattandosi di un regime continuamente variato, in cui la contropressione muta notevolmente anche durante un secondo di tempo. Eguali considerazioni possono farsi riguardo al calcolo della velocità sperimentale e teorica, allo scopo di paragonarne i valori. La velocità reale determinata da Hirn, non può essere neppure la vera velocità media effettuata durante l'uscita del volume gassoso in 2'',71. Di più i valori della velocità teorica, calcolati con la formula del Weissbach, sono determinati uno per uno con un valore della contropressione superiore al vero da usarsi; quindi dovranno tutti naturalmente risultare minori della realtà (teorica). Nelle conclusioni dei confronti stabiliti da Hirn non si può dunque aver fiducia.

Allo scopo di rendere possibile l'istituzione di confronti pienamente rigorosi, io cerco di calcolare il volume effluito con una formula che tenga perfettamente conto della variabilità del regime. Una tal formula, detto  $\delta w$  il volume, sarebbe

$$\delta w = \int_{p_1}^{p'_x} (m_0 m_1 S) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}} \cdot V dt$$

dove  $m_0 m_1 S$  è la sezione contratta della vena,  $V$  la velocità teoretica data dalla formula di Weissbach; e  $p_1$  e  $p'_x$  sono i valori della contropressione

al principio ed alla fine del tempo  $t$ . Per evitare la difficoltà per ora insormontabile nell'uso di una tal formula, derivante dalla impossibilità di conoscere l'espressione analitica della sezione più contratta della vena in funzione della contropressione, io dimostro l'eguaglianza dell'integrale precedente con

$$v_0 \int_{p_1}^{p'_x} dG$$

dove  $v_0$  è il volume specifico del gas nel gasometro e  $dG$  il peso infinitesimo che esce nel tempo  $dt$ . Quindi, per determinare  $dG$  in funzione della contropressione, prima dimostro come il caso hirniano d'efflusso possa identificarsi, a meno di una certa differenza, con quello da un recipiente di grandezza infinita in cui  $p_0$ ,  $v_0$ ,  $T_0$  del gas rimangano costanti, in un altro di volume finito ed invariabile: caso studiato dal Zeuner. La differenza sta nella variabilità di volume del 2° recipiente nel caso delle esperienze di Hirn, a causa del grande manometro di cui già dicemmo. Calcolo questa variabilità in funzione della contropressione, e poi, piegando il metodo del Zeuner al nuovo caso, giungo alla espressione:

$$dG = \frac{2 \frac{1}{s} + \frac{1}{S} p_x + V_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{S}}{k p_0 v_0} dp_x$$

dove  $s$  ed  $S$  sono le sezioni della branca ascendente e della vaschetta del manometro e  $V_2$  il volume (costante) del 2° recipiente privato del manometro. Facendo uso della precedente espressione, trovo poi:

$$\delta w = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{S} p_x^2 + \left( V_2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{S} p_1 \right) p'_x - V_2 p_1}{k p_0}$$

Tale è l'espressione teorica rigorosa del volume uscito dal gasometro durante la variazione di contropressione  $p_1 \equiv p'_x$ , ed i suoi valori, calcolati in funzione dei valori sperimentali della contropressione, saranno pienamente confrontabili con quelli determinati per pura esperienza.

Per il calcolo di quella che chiama velocità reale, Hirn stabilisce la formula

$$V = \frac{\delta w \cdot \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{1/k}}{m_0 m_1 S}$$

nella quale  $\delta w$  è il volume di gas (praticamente determinato) uscito in 1" dal gasometro e l'intero numeratore dovrebbe rappresentare ciò che questo volume diviene penetrando nel 2° recipiente. Non considerando che  $\delta w$  non



è misurato con rigore come è detto in precedenza, ho già dimostrato non preciso il numeratore della frazione; ricerco quindi una espressione rigorosa e indipendente dalla formola di Weissbach di esso numeratore, e trovo, chiamandolo  $\Delta W$ :

$$\Delta W = \frac{1}{kp_0} \int_{p_1}^{p'_x} \left\{ \frac{2p_x}{\frac{1}{s} + \frac{1}{S}} + V_2 - \frac{p_1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{S}} \right\} \left( \frac{p_0}{p_x} \right)^{\frac{1}{k}} dp_x$$

e questa, con una integrazione per parti, mi dà:

$$\Delta W = \frac{1}{k-1} \left\{ \left[ \left( \frac{2p_x - p_1}{\frac{1}{s} + \frac{1}{S}} + V_2 \right) \left( \frac{p_x}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]_{p_1}^{p'_x} - \frac{2kp_0}{\left( \frac{1}{s} + \frac{1}{S} \right) (2k-1)} \left[ \left( \frac{p_x}{p_0} \right)^{\frac{2k-1}{k}} \right]_{p_1}^{p'_x} \right\}$$

Quando  $p_1$  e  $p'_x$  rappresentassero i valori della contropressione, determinati sperimentalmente, al principio ed alla fine di un secondo di tempo e si avesse modo di calcolare il valore medio di  $m_0 m_1 S$  in detto intervallo, la velocità reale potrebbe determinarsi con soddisfacente precisione. Ma questo per ora non è possibile, come ho già indicato, a causa della mancanza di una espressione analitica della sezione della vena \*.

**Chimica.** — *Sulla preparazione del piombo trietile* (1). Nota del dott. A. GHIRA, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

\* In occasione di un lavoro da me eseguito sul potere rifrangente di alcuni composti organo-metallici e che prestissimo sarà pubblicato io cercai di preparare anche il così detto piombo sesquietile. È noto che si trovano registrati nella letteratura due composti organici del piombo che apparterrebbero al tipo  $PbX_3$  o  $Pb_2X_6$ , come generalmente si preferisce di scriverli; il piombo sesquietile  $Pb_2(C_2H_5)_6$  e il piombo sesquiamile  $Pb_2(C_5H_{11})_6$ : esisterebbero inoltre diversi derivati, che però rientrerebbero a dire il vero nel tipo  $PbX_4$ ; così i composti di addizione cogli alogeni  $Pb(C_2H_5)_3Cl \dots$ ; così i sali in cui entrerebbe il radicale monovalente  $Pb(C_2H_5)_3$ : ad esempio l'acetato  $Pb(C_2H_5)_3 \cdot C_2H_3O_2$ . Le due combinazioni sopra rammentate sarebbero interessantissime, giacchè sono le sole del piombo che apparterrebbero indiscu-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Padova.