

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

che esprime il teorema enunciato, figurano lavori di forze per spostamenti compatibili, e però da essa spariscono tutte le forze di lavoro nullo per tutti gli spostamenti compatibili. È quindi inutile tener conto nella precedente relazione delle cosiddette *resistenze dei vincoli*, e però potremo senz'altro intendere che  $X, Y, Z; X', Y', Z'$  rappresentino forze motrici.

\* Si noti che le forze attive o motrici sono arbitrarie, mentre tali non sono le forze totali se effettivamente il sistema è vincolato.

\* Mi sembra molto importante il fatto che il teorema dimostrato, il quale apparisce come una conseguenza pressochè immediata del principio fondamentale della dinamica, somministri ovviamente, come corollario, il *principio dei lavori virtuali*.

\* Invero, se il mobile rimane in equilibrio sotto l'azione delle forze del 1° sistema, sarà :

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0,$$

e per conseguenza :

$$\Sigma (X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z') = 0.$$

\* Reciprocamente, essendo soddisfatta questa equazione per tutti gli spostamenti virtuali compatibili, cioè generabili col moto, sarà :

$$\Sigma (X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z) = 0$$

qualunque sieno le forze attive  $X', Y', Z'$ , e per conseguenza :

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0,$$

cioè l'equilibrio avrà luogo \*.

**Fisica.** — *Influenza dei processi di deformazione sulle proprietà elastiche dei corpi. Flessione dell'ottone.* Nota del dott. M. CANTONE, presentata dal Socio P. BLASERNA.

\* Nell'esame dell'influenza che hanno i processi di deformazione sulle proprietà elastiche ci troviamo di fronte a fenomeni che, nel mentre costituiscono delle vere anomalie per riguardo alla teoria matematica della elasticità, si rivelano governati da leggi costanti e generali la cui esistenza, in gran parte, può essere sfuggita ai fisici solo perchè non si è tentato uno studio sistematico. E fa meraviglia invero come accertate le deviazioni dalla legge di Hooke e le deformazioni permanenti, non si sia pensato a ricercare come varii la forma del corpo oltre che durante l'aumento del carico lungo il periodo di scarica, tanto più che l'esperienze del prof. G. Wiedemann (1) sulla torsione accennavano già a dei risultati che occorreva mettere in rilievo con maggiori particolari.

(1) Wied. Ann. 6, p. 485, 1879.

« Importerà dunque indagare le leggi delle singole trasformazioni facendo variare la forza in modo ciclico, e per la natura stessa della questione converrà prendere in esame speciale due sorta di processi, quelli cioè che si compiono fra il carico zero e varie forze estreme, e quelli in cui i valori massimi e minimi dello sforzo sono uguali e di segno opposto. Chiamerò i primi *cicli unilaterali* e gli altri *cicli bilaterali*.

« In questa Nota mi occuperò dei primi, ed il loro studio sarà fatto per mezzo della flessione dell'ottone.

« Le lastre da me usate furono ottenute da lamine di questo metallo che non presentavano piegature, e si curò che nella loro lavorazione per ridurle a forma parallelepipedica non venissero adoperati altri strumenti all'infuori del bulino del tornio, e della lima.

« All'estremo libero di ciascuna lastra, in un piccolo taglio praticato nel senso dello spessore a metà di larghezza, si saldò un pezzo di filo di ferro sottile, col quale si formarono due anelli destinati l'uno a reggere un piatto per i carichi flettenti il corpo in basso, e che io chiamerò d'ora in poi *positivo*, e l'altro ad attaccarvi un filo disteso verticalmente che serviva ad esercitare gli sforzi in senso opposto o *negativi*. Il filo accavalcato sulla gola di una carrucola, girevole senza forte attrito, portava all'estremo libero un piatto di ugual peso del primo, ed un'asticina trasversale che scorrendo fra apposite guide impediva i moti di rotazione dei pesi. Trovandosi la carrucola a circa tre metri dalla lastra, potevo esser sicuro che la direzione delle forze negative si mantenesse sensibilmente costante, almeno per i limiti di esattezza cui aspiravo nelle mie ricerche.

« Le misure delle saette di flessione si facevano con un catatometro di Starke e Kammerer, mirando col cannocchiale di questo strumento sul bordo terminale di una linguetta di carta incollata in prossimità dei due anelli e sporgente all'incirca mezzo millimetro dalla lastra.

« Per produrre il carico usavo pesi di circa 96 grammi formati con lamina di piombo, cui si saldò per comodità di maneggio un'appendice di ottone. Tanto l'applicazione che la soppressione dei singoli pesi si compiva con tutte le cautele possibili, per procedere come se la forza fosse fatta variare gradatamente da un valore al successivo. I vari pezzi erano numerati, e nei calcoli si tenne conto del peso esatto di ciascuno.

« Il metodo tenuto per l'attuazione dei *cicli unilaterali* era il seguente:

« Assoggettata la lastra a sforzi crescenti sino ad un determinato limite P, si operavano le trasformazioni da P a zero e da zero a P, si continuava in seguito ad aumentare il carico, e pervenuti ad una nuova forza P' si faceva compiere al corpo un secondo ciclo fra P' e zero, e così di seguito.

« Numerose esperienze vennero fatte in proposito; io mi limito a riportare i risultati di due serie, che del resto sono in tutto conformi alle altre che non saranno qui prese in esame.

« Ogni tabella si riferisce ad una serie di esperienze:  $P$  denota il numero di pesi che costituiscono il carico;  $s$  la saetta computata a partire dalla posizione iniziale della mira, e le frecce nelle colonne contenenti le  $s$  servono ad indicare il senso di variazione della forza.

« I valori riportati di  $E$  furono calcolati mediante la formula

$$E = \frac{4l^3}{ab^3} \frac{\Delta P}{\Delta s},$$

dove  $l$ ,  $a$ ,  $b$  simboleggiano rispettivamente la lunghezza, la larghezza e lo spessore della lamina, e  $\Delta P$  la variazione della forza corrispondente alla variazione della saetta  $\Delta s$ . Stante l'inammissibilità della legge di Hooke, i valori di  $E$  fornirebbero l'elemento caratteristico per lo studio delle reazioni elastiche, potendosi la grandezza data da quella formula considerare come il modulo relativo alle singole trasformazioni fra limiti di forza assai vicini. Ciò varrà fino a quando non si pervenga a saette piuttosto grandi, poichè allora nel caso che trattiamo noi della flessione, indipendentemente dall'essere o no le forze elastiche proporzionali agli spostamenti delle particelle, cambiano colla forma del corpo le condizioni meccaniche in base alle quali si deduce la formula per la saetta, e quindi la  $E$  perde, a rigore, il suo significato di modulo di elasticità. Tuttavia, a meno che non si vada a deformazioni esagerate, continueremo a tenerne conto per formarci un criterio approssimato della legge con cui variano le forze elastiche.

« Allo scopo di vedere poi come si comporti nell'insieme la sostanza per le successive trasformazioni totali, ho voluto ricavare le medie di  $E$  relative tanto ai mezzi cicli che ai cicli interi, ed i valori ottenuti trovansi indicati rispettivamente con  $E_1$  ed  $E_2$ .

« Talune delle serie da me compiute si riferiscono a lastre usate per la prima volta, altre a corpi i quali, deformati precedentemente, furono ridotti con un processo, di cui qui non mi posso occupare, in uno stato che, o si avvicina moltissimo a quello iniziale, o lo può sostituire per i fenomeni in esame. I risultati avuti nei due casi sono assai concordanti.

O<sub>4</sub> 23 Marzo

TABELLA I.

P	s	E	s	E	s	E	s	E	s	E	s	E	s	E	s	E
0	—		0.16	9460	0.16	9690	0.22	9540	0.22	9610	0.32	9540	0.32	9540		
1	2.52	9540	2.70	9510	2.64	9770	2.74	9450	2.72	9770	2.84	9450	2.84	9580		
3	7.60	9560	7.78	9730	7.70	9620	7.84	9750	7.78	9750	7.94	9700	7.88	9780		
5	12.62	9780	12.72	10200	12.70	10110	12.70	10100	12.70	10020	12.70	10140	12.70	10050		
6	15.08		15.08		15.08	17.54	17.62	17.58	17.58	17.58	17.58	17.58	17.58	17.58		
7					19.96	19.96	19.96	19.96	19.96	19.96	19.96	19.96	19.96	19.96		
8																
9																
10																
11																
12																
E <sub>1</sub>				9600		9761		9755		9814		9875		9862		
E <sub>2</sub>						9726				9785				9847		

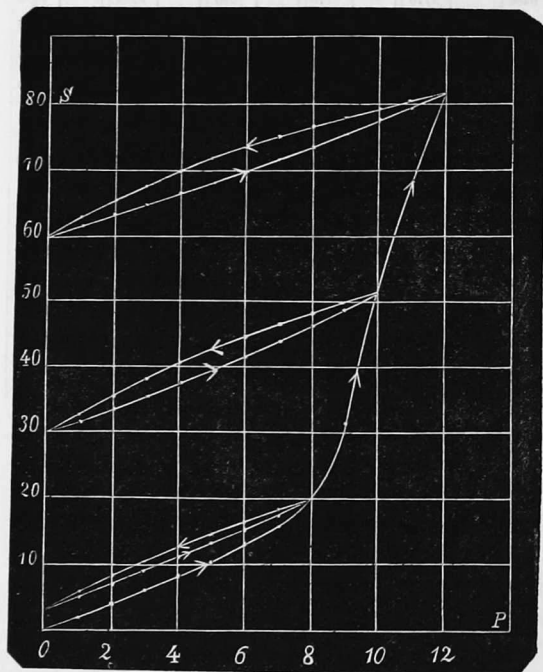
0	0.60	9540	0.60	9770	1.52	9400	1.52	9770	4.04	9170	4.04	9690	6.06	9100	6.06	9690
1	3.12	9430	3.06	9510	4.08	9430	3.98	9770	6.66	9290	6.52	9580	8.70	9220	8.54	9580
3	8.24	9700	8.14	9750	9.20	9620	9.04	9750	11.86	9600	11.56	9780	13.94	9570	13.58	9780
6	15.68	10230	15.54	10170	16.70	10250	16.44	10190	19.38	10250	18.94	10250	21.48	10270	20.96	10320
10	25.10	10740	25.02	10650	26.10	10780	25.90	10780	28.78	11060	28.34	10840	30.86	11090	30.30	10890
11	27.34	11020	27.28	10730	30.56	11180	30.40	10780								
12	29.52		29.52	9510	32.72	11430	32.64	11010								
13		32.06	32.06	8700	34.82	34.82	34.82	37.48								
14		34.82	34.82					7790	37.48	37.22	37.22	39.54	39.54	39.14		
15								7790	39.58	39.42	39.42	43.70	43.70	43.54		
16								6500	41.64	41.62	41.62	45.66	45.66	45.66		
17																
E <sub>1</sub>		9932		10008		10164		10178		10315		10281		10424		10372
E <sub>2</sub>				9970				10171				10298				10398

O<sub>1</sub> ricotta 24 Maggio

TABELLA II.

P	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	s	Δs	
0	—		0.09		0.09		3.06		3.06		29.73		29.73		59.67		59.67		1.65
1	2.04	2.04	2.15	-2.06	2.04	5.55	-2.19	5.08	2.02	32.60	-2.89	31.65	1.92	62.62	-2.95	61.32	1.66		
2	4.06	2.02	4.20	-2.05	2.03	7.90	-2.35	7.11	2.03	35.02	-2.90	33.06	1.91	65.10	-2.48	62.98	1.64		
3	6.12	2.06	6.22	-2.02	2.04	10.13	-2.23	9.14	2.03	33.09	-2.87	35.49	1.93	67.38	-2.28	64.62	1.64		
4	8.20	2.08	8.20	-1.98	2.02	12.23	-2.10	11.22	2.03	40.42	-2.83	37.44	1.95	69.53	-2.15	66.26	1.64		
5					2.20	14.20	-2.06	13.33	2.11	42.59	-2.17	39.46	2.02	71.45	-1.92	67.95	1.60		
6					2.47	16.25	-1.96	15.49	2.16	44.58	-1.99	41.59	2.13	73.21	-1.76	69.67	1.72		
7					2.93	18.19	-1.94	17.70	2.21	46.43	-1.85	43.76	2.17	74.86	-1.05	71.44	1.77		
8					4.24	20.06	-1.87	20.12	2.42	48.18	-1.75	46.04	2.28	76.34	-1.48	73.26	1.82		
9								31.62	11.50	49.88	-1.70	48.37	2.33	77.78	-1.44	75.12	1.86		
10								19.88	19.88	51.50	-1.62	51.35	2.98	79.08	-1.30	77.04	1.92		
11												67.94	16.59	80.34	-1.26	79.09	1.96		
12												81.60	13.66	81.60	-1.26	81.32	2.32		

« L'annesso diagramma delle saette *s* in funzione delle forze flettenti si riferisce ai risultati della tab. II, i quali si prestano meglio per una rappresentazione su piccola scala.



« Dai risultati esposti e dal diagramma che li rappresenta in parte si vede che il fenomeno preso a considerare è analogo a quello studiato dal Warburg (1) e dall'Ewing (2) in condizioni simili nel magnetismo, ed abbraccia molti fatti che sono stati messi in rilievo nelle ricerche di elasticità.

« Ad ogni ciclo corrisponde nel diagramma un coppia indicante che le deformazioni ottenute

(1) Wied. Ann. 13, p. 141, 1881.

(2) Phil. Trans. of the R. S. of London 176, II, p. 523, 1886.

caricando la lastra sono rispettivamente minori di quelle relative alle stesse forze durante la scarica, e che cambiando il senso di variazione della forza agente, la sostanza presenta in principio una maggiore elasticità. Abbiamo dunque da fare con un fenomeno di vera isteresi. Che esso si produca con forze più piccole di quelle cui ci siamo arrestati nelle prime serie non è qui il caso di asserire; quello che possiamo affermare si è non trattarsi di anomalie, ma di un vero processo regolare secondo attestano la chiusura dei cappii ed il modo marcato con cui si produce il fenomeno nei cicli di grande ampiezza.

« Del resto che le cose procedessero nel senso da noi trovato era da prevedersi, atteso il particolare messo in luce dal Wertheim <sup>(1)</sup>, che cioè anche colle più piccole deformazioni si hanno effetti permanenti quando le forze cessano di agire. Le nostre indagini dunque non rivelano fatti del tutto ignorati, ma li collegano presentandoli sotto un nuovo aspetto.

« Uno studio più particolareggiato dei cicli sarà possibile seguendo l'andamento del modulo  $E$ , o quando esso manchi delle  $\Delta s$ . Reggono in proposito leggi diverse a seconda si considerino lastre ricotte o crude; infatti mentre per le prime, come si desume dal diagramma, i valori di  $E$  diminuiscono tanto venendo da  $P$  a *zero* che nel cammino inverso, nelle ultime si hanno moduli decrescenti da  $P$  a *zero* e crescenti da *zero* a  $P$ ; sicchè in tal caso gli archi relativi alla seconda trasformazione, pur rimanendo più bassi delle curve figurative del primo mezzo ciclo, presentano al pari di queste la loro convessità verso l'alto <sup>(2)</sup>.

« I valori di  $E_1$ , e di conseguenza anche quelli di  $E_2$ , ci accusano di altra parte un aumento dell'elasticità media della sostanza quando si passi da un ciclo ad uno di maggiore estensione, mentre procedendo per forze crescenti a partire dallo stato *non deformato*, si ha per carichi non piccoli una maggiore cedevolezza al crescere dello sforzo flettente.

« Per riguardo ai valori di  $E$  osserveremo che essi non sono uguali per le diverse lastre cimentate, neanche operando fra limiti di forza assai ristretti. Può darsi benissimo che vi sieno differenze di struttura capaci di giustificare piccole oscillazioni del modulo, ma quelle che noi abbiamo sono troppo grandi perchè possano attribuirsi alla sostanza con cui si opera; è più probabile invece che le divergenze derivino dalle imperfette misure delle dimensioni. Comunque vada la cosa, si tratta di questione che per noi ha interesse secondario, in quanto il nostro esame si proposse lo studio non del modulo ma delle sue variazioni.

(1) Ann. de chim. et phys. 12, p. 385, 1842.

(2) Per ulteriori ricerche sono riuscito a constatare che, in seguito all'*accomodazione*, si ha per le lastre ricotte nei passaggi da *zero* a  $P$ , un comportamento analogo a quello del metallo crudo.

« La curva che rappresenta l'andamento delle saette per forze crescenti a partire dallo stato *non deformato*, e che io per brevità chiamerò *curva caratteristica della deformazione*, non viene sensibilmente modificata dai cicli. Questo ho potuto constatare con lastre cimentate diverse volte di seguito a partire da quello stato. Si trova allora che, prendendo le mosse da condizioni analoghe ed agendo per forze crescenti, sia con continuità, sia colle interruzioni dovute ai cicli unilaterali, le saette che corrispondono ai diversi valori dello sforzo flettente sono per i punti della *curva caratteristica* presso a poco uguali.

« Il risultato vale anche per cicli bilaterali, e perciò raccolgo nelle tabelle che seguono tutti i particolari che si riferiscono all'argomento, indicando con uno o due tratti orizzontali le interruzioni dovute rispettivamente ai primi cicli o a questi ultimi.

O<sub>4</sub>

TABELLA III.

O<sub>5</sub>

TABELLA IV.

O<sub>5</sub>

TABELLA V.

P	5 Marzo		7 Marzo		8 Marzo		10 Mar. p. m.	
	s	As	s	As	s	As	s	As
0	—	—	—	—	—	—	—	—
1	2.51	2.47	2.49	2.49	2.52	2.52	2.51	2.51
2	4.98	4.98	4.98	4.98	5.00	4.99	4.99	2.48
3	7.52	2.54	7.54	2.56	7.54	2.54	7.55	2.56
4	10.02	2.50	10.08	2.54	10.04	2.50	10.05	2.50
5	12.49	2.47	12.52	2.44	12.51	2.47	12.53	2.48
6	14.92	2.43	14.96	2.44	14.96	2.45	14.97	2.44
6	—	—	—	—	14.96	—	14.98	—
7	17.31	2.39	17.37	2.41	17.36	2.40	17.39	2.41
8	19.71	2.40	19.76	2.39	19.74	2.38	19.77	2.38
8	—	—	—	—	19.73	—	19.77	—
9	22.10	2.39	22.16	2.40	22.11	2.38	22.15	2.38
10	24.51	2.41	24.57	2.41	24.52	2.41	24.55	2.40
10	—	—	—	—	24.53	—	24.55	—
11	26.92	2.41	26.88	2.41	26.92	2.39	26.97	2.42
12	29.34	2.42	29.39	2.41	29.32	2.40	29.35	2.38
12	—	—	—	—	29.36	—	29.37	—
13	31.87	2.53	31.94	2.55	31.88	2.52	31.89	2.52
14	34.64	2.77	34.60	2.66	34.56	2.68	34.65	2.76
14	—	—	—	—	34.50	—	34.65	—

P	29 Marzo		30 Marzo	
	s	As	s	As
0	—	—	—	—
c+1	1.38	1.38	1.39	1.39
c+3	3.65	2.27	3.64	2.25
c+5	5.88	2.23	5.87	2.23
c+7	8.06	2.18	8.06	2.19
c+8	9.14	1.08	9.14	1.08
c+8	—	—	9.15	—
c+9	10.22	1.08	10.23	1.08
c+11	12.37	2.15	12.37	2.14
c+12	13.46	1.09	13.47	1.10
c+12	—	—	13.45	—
c+13	14.56	1.10	14.53	1.10
c+15	16.80	2.24	16.79	2.24
c+16	17.97	1.17	17.96	1.17
c+16	—	—	17.97	—
c+17	19.24	1.27	19.20	1.23
c+18	20.63	1.39	20.59	1.39
c+18	—	—	20.57	—

P	3 Apr. p. m.		4 Aprile		6 Aprile	
	s	As	s	As	s	As
0	—	—	—	—	—	—
1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12
3	3.37	2.26	3.38	2.27	3.39	2.27
5	5.63	2.26	5.66	2.28	5.66	2.27
7	7.88	2.20	7.85	2.19	7.85	2.19
8	8.93	1.10	8.94	1.09	8.94	1.09
8	—	—	8.92	—	8.95	—
9	10.08	1.10	10.02	1.10	10.03	1.08
11	12.18	2.15	12.18	2.16	12.20	2.17
12	13.27	1.09	13.27	1.09	13.29	1.09
12	—	—	13.26	—	13.27	—
13	14.37	1.10	14.36	1.10	14.37	1.10
15	16.63	2.26	16.58	2.22	16.63	2.26
16	17.81	1.18	17.78	1.20	17.79	1.16
16	—	—	17.80	—	17.80	—
17	19.02	1.21	19.02	1.22	19.02	1.22
18	20.34	1.32	20.33	1.31	20.32	1.30
18	—	—	20.34	—	20.32	—
19	21.75	1.41	21.72	1.38	21.75	1.43
20	23.23	1.48	23.24	1.52	23.22	1.47
20	—	—	23.26	—	23.20	—



« Assodata l'influenza trascurabile che i cicli esercitano sulla natura della curva caratteristica, siamo autorizzati a mettere in rilievo la diversa legge di deformazione di un corpo il quale, sottoposto prima all'azione di un carico, risenta l'impulso di una nuova forza a seconda che essa agisca nello stesso senso della precedente od in senso opposto, avendosi in questo caso una deformazione più piccola che nell'altro ed accentuandosi la differenza coll'elevarsi del limite di forza cui ci riferiamo.

« Resta però provato che la deformazione subita dal corpo qualora si passi da  $P$  a  $P + P'$ , è la stessa sia che il passaggio si produca direttamente, sia che si vada prima da  $P$  a zero e poi da zero a  $P + P'$  ».

**Fisica.** — *Ulteriori ricerche sui processi di deformazione.*

Nota del dott. M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Termodinamica.** — *Sopra una formula di Termodinamica e sul termolavoro interno nei corpi solidi e liquidi.* Nota del dott. ALESSANDRO SANDRUCCI, presentata dal Socio BLASERNA.

« I. Leggendo la Nota del dott. Boggio-Lera, *Sul lavoro interno nella dilatazione dei corpi solidi e sul rapporto di Poisson*, recentemente comparsa nei Rendiconti di questa illustre Accademia <sup>(1)</sup>, ho posto attenzione alla prima formula che in essa comparisce e che è:

$$(1) \quad C - c = A \frac{T\alpha^2 v}{\omega}$$

nella quale secondo l'autore  $C$  e  $c$  sono i calori specifici di un corpo solido a pressione ed a volume costante,  $A$  l'equivalente calorifico del lavoro,  $\alpha$  il coefficiente vero di dilatazione a pressione costante,  $v$  il volume specifico alla temperatura  $T$ , ed  $\omega$  il coefficiente di compressibilità cubica a temperatura costante. Nella mia Nota II, *Conseguenze analitiche di una formula indicante la velocità molecolare totale di un corpo qualunque* (Rivista scientifico-industriale, Firenze, 1886, n. 18-20) rileggo ora la formula:

$$c_p - c_v = AT \frac{v_0 \alpha^2}{\beta(1 + A_T)}$$

la quale, adottando le notazioni del Boggio-Lera, può scriversi:

$$(2) \quad C - c = AT \frac{v_0^2 \alpha^2}{\omega v}$$

rappresentando  $v_0$  il volume specifico della sostanza a  $0^\circ$  e  $v$  quello a  $T$ .

<sup>(1)</sup> Seduta del 16 luglio 1893, p. 43.