# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

« Assodata l'influenza trascurabile che i cicli esercitano sulla natura della curva caratteristica, siamo autorizzati a mettere in rilievo la diversa legge di deformazione di un corpo il quale, sottoposto prima all'azione di un carico, risenta l'impulso di una nuova forza a seconda che essa agisca nello stesso senso della precedente od in senso opposto, avendosi in questo caso una deformazione più piccola che nell'altro ed accentuandosi la differenza coll'elevarsi del limite di forza cui ci riferiamo.

« Resta però provato che la deformazione subìta dal corpo qualora si passi da P a P + P′, è la stessa sia che il passaggio si produca direttamente, sia che si vada prima da P a *zero* e poi da *zero* a P + P′ ».

**Fisica.** — *Ulteriori ricerche sui processi di deformazione.* Nota del dott. M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Termodinamica.** — *Sopra una formula di Termodinamica e sul termolavoro interno nei corpi solidi e liquidi.* Nota del dott. ALESSANDRO SANDRUCCI, presentata dal Socio BLASERNA.

« I. Leggendo la Nota del dott. Boggio-Lera, *Sul lavoro interno nella dilatazione dei corpi solidi e sul rapporto di Poisson*, recentemente comparsa nei Rendiconti di questa illustre Accademia [1], ho posto attenzione alla prima formula che in essa comparisce e che è:

$$(1) \qquad C - c = A\,\frac{T\alpha^2\, v}{\omega}$$

nella quale secondo l'autore C e $c$ sono i calori specifici di un corpo solido a pressione ed a volume costante, A l'equivalente calorifico del lavoro, $\alpha$ il coefficiente vero di dilatazione a pressione costante, $v$ il volume specifico alla temperatura T, ed $\omega$ il coefficiente di compressibilità cubica a temperatura costante. Nella mia Nota II, *Conseguenze analitiche di una formula indicante la velocità molecolare totale di un corpo qualunque* (Rivista scientifico-industriale, Firenze, 1886, n. 18-20) rileggo ora la formula:

$$c_p - c_v = AT\,\frac{v_0\,\alpha^2}{\beta(1+\Delta_T)}$$

la quale, adottando le notazioni del Boggio-Lera, può scriversi:

$$(2) \qquad C - c = AT\,\frac{v^2{}_0\alpha^2}{\omega\, v}$$

rappresentando $v_0$ il volume specifico della sostanza a 0° e $v$ quello a T.

[1] Seduta del 16 luglio 1893, p. 43.

« Vista la diversità che passa tra (1) e (2), i cui secondi membri dovrebbero essere identici, ho cercato l'espressione della differenza dei due calori specifici secondo altri autori. Il Zeuner nella sua *Théorie Mécanique de la Chaleur* a pag. 556 (Appendice) dà la formula

$$C - c = AT\, v_0\, \alpha^2\, E$$

riducibile alla forma

$$C - c = AT \frac{v_0\, \alpha^2}{\omega} \tag{3}$$

perchè E rappresenta il coefficiente di elasticità di una sbarra solida e si può porre secondo il Zeuner

$$\omega = \frac{1}{E}$$

appoggiandosi sul dato di Wertheim che, cioè, le compressibilità lineare e cubica sono eguali.

« Lo Jamin (*Traité de Physique* etc. 1888. T. 2e *Thermodynamique*. Chap. IV, pag. 86**) trova:

$$C - c = l\, v_0\, \alpha$$

che, per essere (pag. 82**):

$$l = AT \frac{\alpha}{\omega}$$

può scriversi:

$$C - c = AT \frac{v_0\, \alpha^2}{\omega} \tag{4}$$

identicamente alla (3).

« La (3) e la (4) differiscono dalla (1) e dalla (2). La diversità con la (1) sta nel valore del volume specifico adoperato; in essa trovasi $v$ invece di $v_0$, cioè il volume specifico della sostanza a T invece che allo zero centigrado. La differenza con la (2) consiste in un fattore $\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ che in essa trovasi in più. Mi è parso conveniente, vista l'importanza di tali formule, (il Boggio-Lera adopera la (1) per stabilire un teorema importante) ricercare le cause di tali disaccordi e fissare qual sia la forma più precisa da darsi alla espressione analitica della differenza $C - c$ pei corpi solidi e liquidi.

« II. Tutti gli autori più o meno direttamente deducono le formule in esame da una delle equazioni fondamentali di termodinamica. Il Boggio-Lera la scrive:

$$C - c = -AT \left(\frac{dp}{dv}\right)_T \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Il Zeuner:

$$AT = (c_p - c_v) \left(\frac{dt}{dv}\right)_p \left(\frac{dt}{dp}\right)_v$$

e queste sono identiche per la nota relazione:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v\left(\frac{dt}{dv}\right)_p\left(\frac{dv}{dp}\right)_t=-1$$

e per essere $c_p = \mathrm{C}$, $c_v = c$.

« Lo Jamin, se non adopera direttamente una tale equazione, pure servendosi del metodo di Lippmann per applicare i principî fondamentali della termodinamica, è costretto a fare uso delle derivate parziali che in essa compariscono. Io ho dedotto la (2) applicando l'equazione sotto la forma usata dal Zeuner.

« Le differenze osservate nascono dalla diversa forma analitica che vien data ai coefficienti di dilatazione e di compressibilità. Il Boggio-Lera, detto $\omega$ il coefficiente di compressibilità cubica ed $\alpha$ quello di dilatazione cubica a pressione costante, entrambi alla temperatura indicata T, pone:

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{dp}\right)_{\mathrm{T}} \\ \alpha = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{P}} \end{cases}$$

« Il Zeuner, supponendo costante il coefficiente di dilatazione cubica:

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{v_0}\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{P}} \\ \omega = -\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{dv}{dp}\right)_{\mathrm{T}} \end{cases}$$

« Lo Jamin (pag. 21 e 22) (1):

$$(7)\qquad \begin{cases} \omega = -\dfrac{1}{v_0}\left(\dfrac{dv}{dp}\right)_{\mathrm{T}} \\ \alpha = \dfrac{1}{v_0}\left(\dfrac{dv}{d\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{P}} \end{cases}$$

« Il Zeuner però, osservando « che con sufficiente esattezza si può prendere in luogo di $v$ il volume $v_0$, che corrisponde allo zero centigrado », finisce coll'usare, come lo Jamin, la relazione

$$\omega = -\frac{1}{v_0}\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\mathrm{P}}$$

« Io finalmente, seguendo il prof. G. P. Grimaldi nella sua Nota *Sulla relazione teoretica trovata dal Duprè fra il volume, la temperatura ed i coefficienti di dilatazione e di compressibilità dei corpi* pubblicata nel

(1) Egli chiama $\mu$ il coefficiente di compressibilità.

numero di maggio e giugno 1886 del Nuovo Cimento, pongo nella mia Nota citata:

$$\alpha = \frac{1}{v_0}\left(\frac{dv}{dT}\right)_T$$

$$\omega = -\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T$$

« In quanto alle formule usate dal Boggio-Lera, mi par giusto osservare che lo Jamin (pag. 21) dice: « Nous avons appelé coefficient vrai de dila- « tation sous pression constante à la température $t$, la limite $\alpha = \frac{1}{v_0}\frac{dv}{dt}$ vers « laquelle tend l'augmentation de volume de l'unité de volume mesurée à zéro, « quand l'élevation de température $dt$ tend vers zéro ». Adottando questa definizione, che del resto è quella comunemente usata da tutti, bisogna dire non precisa analiticamente la seconda delle (5), in cui ci è $v$ in luogo di $v_0$. Se

$$\Delta_t = \varphi(t)$$

rappresenta la dilatazione subita dalla unità di volume fra 0° e $t$°, si suol porre, sia o non sia $\alpha$ variabile colla temperatura,

$$\alpha = \frac{d\Delta_t}{dt}$$

e siccome il volume di un corpo a $t$°, essendo $v_0$ quello a 0°, dovrà in ogni ipotesi essere espresso dalla formula

$$v = v_0 + v_0\,\Delta_t$$

se ne avrà, derivando rapporto e $t$ e supponendo costante la pressione:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = v_0\,\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p$$

espressione di $\alpha$ che usata nelle applicazioni darà resultati precisi.

« Circa le relazioni (6) usate dal Zeuner gioverà osservare che per l'esattezza della prima non sarà necessario supporre, dietro ciò che precede, $\alpha$ costante, il che per molti solidi e pei liquidi può non essere supponibile con esattezza conveniente. È vero che il Zeuner deduce quella prima relazione dall'equazione

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = v_0\left(\alpha + t\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

che solo può darla nell'ipotesi della costanza di $\alpha$. Ma si noti che l'autore ricava la precedente equazione dalla elementare

$$v = v_0\,(1 + \alpha\,t)$$

la quale, come è chiaro, non può essere rigorosamente giusta se non a patto di supporre a priori $\alpha$ costante, come è per i gas soltanto supponibile, e quindi non permette, senza evidente contraddizione, la derivazione dei suoi due membri come la fa il Zeuner. Nella seconda delle (6) poi non sarà sempre permesso cambiare $v$ in $v_0$, se si vorrà lasciare a quella relazione la sua completa generalità e farla valevole con precisione anche pei liquidi, riguardo ai quali $v_0$ e $v$ potrebbero presentare spesso differenza fra loro non trascurabile; e questa osservazione potrà valere anche per la formula analoga usata, senza alcuna osservazione in proposito, dallo Jamin.

« Dopo questa discussione ritengo che, a voler essere precisi, sia necessario usare per $\alpha$ ed $\omega$ le relazioni

$$\alpha = \frac{1}{v_0}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p$$

$$\omega = -\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_t$$

di cui appunto ho fatto uso per ottenere la (2), che mi par quindi equazione preferibile alle altre indicate. Ed una conferma della convenienza di questo giudizio si può trovare nel citato lavoro del prof. Grimaldi; il quale appunto, usando di $\alpha$ ed $\omega$ sotto la forma precedente nel modificare una formula del Duprè, ha ottenuto valori della pressione interna nei liquidi più approssimati e più conformi ai resultamenti sperimentali.

« III. Il Boggio-Lera nella Nota che vado esaminando, giunge ingegnosamente alla relazione

$$(8) \qquad (\mathrm{C} - \mathrm{K})\,\mathrm{E}\delta = \frac{\alpha}{2\omega}$$

dove K è il calore specifico assoluto di un corpo, E l'equivalente meccanico del calore, $\delta$ la densità a T e le rimanenti lettere hanno lo stesso significato che in ciò che precede. Trasformando la (1) e dividendo membro a membro con la (8), ricava

$$(9) \qquad \frac{(\mathrm{C} - c)\,\mathrm{E}\delta}{(\mathrm{C} - \mathrm{K})\,\mathrm{E}\delta} = 2\alpha\,\mathrm{T}$$

che gli serve a stabilire un teorema interessante. Giusta le considerazioni svolte più sopra la (9) deve essere resa più precisa. La (2) ci dà:

$$(10) \qquad (\mathrm{C} - c)\,\mathrm{E}\delta = \mathrm{T}\left(\frac{\alpha\, v_0}{v}\right)^2 \frac{1}{\omega} \qquad \left(\delta = \frac{1}{v}\right)$$

« Da questa e dalla (8) otteniamo:

$$(11) \qquad \frac{(\mathrm{C} - c)\,\mathrm{E}\delta}{(\mathrm{C} - \mathrm{K})\,\mathrm{E}\delta} = 2\alpha\,\mathrm{T}\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

che può darci un teorema analogo a quello del Boggio-Lera.

« Il primo membro delle (9) ed (11) non mi pare però che possa dirsi veramente il rapporto fra l'energia consumata in lavoro interno per l'aumento di 1° di temperatura a volume costante e quella consumata in lavoro interno per lo stesso aumento di temperatura a pressione costante come si legge nell'enunciato del citato teorema.

« Sia infatti $(dQ)_p$ una quantità di calore che venga assorbita dall'unità di peso d'un corpo qualunque libero di espandersi a pressione costante, quando la sua temperatura varii di $dt$. Applicando i noti principî di termodinamica, detto K il calore specifico assoluto, $dI_p$ il termolavoro interno elementare, $dL$ il termolavoro esterno, avremo evidentemente

$$(12) \qquad (dQ)_p = Kdt + AdI_p + AdL$$

« Sia invece $(dQ)_v$ una quantità di calore assorbita nelle stesse condizioni dallo stesso corpo, ma a volume costante; avremo:

$$(13) \qquad (dQ)_v = Kdt + AdI_v$$

ove $dI_v$ indicherà il termolavoro interno a volume costante. Integrando queste due espressioni fra $t = \theta$ e $t = \theta + 1$, supposto ciò analiticamente possibile, otterremo:

$$(14) \qquad \begin{cases} C = K + A\left(I_p\right)_\theta^{\theta+1} + A\left(L\right)_\theta^{\theta+1} \\ c = K + A\left(I_v\right)_\theta^{\theta+1} \end{cases}$$

« Trascurando, perchè piccolissimo, il termine $A(L)_\theta^{\theta+1}$ e sottraendo l'una dall'altra le due equazioni precedenti, avremo:

$$(15) \qquad C - c = A\left\{\left(I_p\right)_\theta^{\theta+1} - \left(I_v\right)_\theta^{\theta+1}\right\}$$

« Da questa:

$$(16) \qquad (C - c)\,E\delta = \left\{\left(I_p\right)_\theta^{\theta+1} - \left(I_v\right)_\theta^{\theta+1}\right\}\delta$$

la quale, divisa ordinatamente per l'altra:

$$(C - K)\,E\delta = \left(I_p\right)_\theta^{\theta+1}\delta$$

fornirà subito, badando alla (11):

$$(17) \qquad \frac{(C-c)\,E\delta}{(C-K)\,E\delta} = \frac{\left(I_p\right)_\theta^{\theta+1} - \left(I_v\right)_\theta^{\theta+1}}{\left(I_p\right)_\theta^{\theta+1}} = 2\alpha T\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

« Indicando per semplicità con $I_p$ ed $I_v$ i termolavori specifici interni a pressione ed a volume costante (1), avremo:

$$\frac{I_p - I_v}{I_p} = 2\alpha T\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

da cui:

$$(18) \qquad \frac{I_v}{I_p} = 1 - 2\alpha T\left(\frac{v_0}{v}\right)^2.$$

(1) Chiamerò « termolavoro interno specifico » il lavoro interno eseguito dal calore nell'unità di peso del corpo mentre si scalda di 1°.

« La (17) fa vedere come il primo membro della (9) sia il rapporto fra la differenza dei due termolavori interni e quello a pressione costante e come quindi l'enunciato del teorema del Boggio-Lera vada modificato; e la (18) può servire a stabilire il teorema seguente in luogo di quello:

« Il rapporto tra l'energia consumata in lavoro interno per l'aumento di un grado nella temperatura a volume costante e quella consumata in lavoro interno per lo stesso aumento di temperatura a pressione costante, è eguale all'unità diminuita del doppio prodotto del coefficiente vero di dilatazione cubica per la temperatura assoluta e per l'inversa del quadrato del binomio di dilatazione.

« IV. Nella Nota *Osservazioni intorno ad una formula del Duprè e ad una dimostrazione datane dal Heen* (Rivista scientifico-industriale, Firenze 1887) ho mostrato come nei corpi solidi (o liquidi) l'« attrazione al contatto » del Duprè o pressione interna, possa essere rappresentata da

$$A = \frac{E(C-K)}{\alpha v_0}. \tag{19}$$

« Tenendo conto della (8) trovata dal Boggio-Lera, la precedente sarà trasformabile in

$$A = \frac{1}{2\omega}\frac{v}{v_0}. \tag{20}$$

Questa lega in modo semplicissimo la pressione interna ad una data temperatura col coefficiente di compressibilità.

« Chiamando, come in ciò che precede, $I_p$ il termolavoro interno specifico, la formula (18) della Nota superiormente citata, ci dà:

$$I_p = A\alpha v_0$$

e questa, combinata colla precedente, diverrà:

$$I_p = \frac{\alpha v}{2\omega}. \tag{21}$$

« Sostituendo tal valore nella (18), otteniamo:

$$I_v = \frac{\alpha v}{2\omega} - T\frac{\alpha^2 v_0^2}{\omega v} \tag{22}$$

« Volendo le espressioni dei termolavori indipendenti da $\omega$, basta osservare che:

$$I_p = E(C-K) \tag{23}$$

il cui secondo membro è facilmente calcolabile, essendo noto C per l'esperienza e K per il calcolo; e sostituendo un tal valore nella (18) si ha subito:

$$I_v = E(C-K)\left\{1 - 2\alpha T\left(\frac{v_0}{v}\right)^2\right\} ». \tag{24}$$