ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 26 novembre 1893.

A. Messedaglia Presidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche.* Nota di F. Enriques, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Quando si studia la geometria sul piano ponendo a base il gruppo delle trasformazioni birazionali (o cremoniane) di esso, si presenta come una delle prime ricerche lo studio dei sistemi lineari di curve, ed in ispecie per quei sistemi distinti per la semplicità di alcuno dei loro caratteri, nasce il problema della riduzione a *tipi*, cioè la questione di classificarli distribuendoli in famiglie di sistemi trasformabili birazionalmente uno nell'altro e di cui i tipi sieno i rappresentanti più semplici (proiettivamente). A questo ordine d'idee (che apparisce importante sebbene non applicabile nello studio delle forme più elevate) si collegano molte notissime ricerche preliminari nella geometria sul piano: così si ha la riduzione a *tipi* dei sistemi di curve di genere 0, 1, 2, e di quelli *semplici* (cioè in cui il passaggio per un punto non trae il passaggio della curva generica per altri punti variabili con esso) del genere 3 (Noether, Bertini, Guccia, Iung, Martinetti, Segre, Castelnuovo) (1); parimente si ha la classificazione dei sistemi semplici di curve aventi 2, 3, 4 intersezioni variabili, cioè rappresentativi di superficie razionali del 2°, 3°, 4°

(1) Cfr. Castelnuovo. *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane.* Prefazione. Accad. di Torino. Memorie, 1891.

ordine (Cremona, Clebsch, Kummer, Noether) (1); infine sono stati classificati e ricondotti a *tipi* i sistemi lineari di curve contenenti una data serie speciale, così i sistemi lineari semplici di curve iperellittiche, e quelli di cui la curva generica contiene una g^1_m ed aventi una dimensione assai elevata (2).

« Ricerche simili non sono state fino ad ora intraprese riguardo ai sistemi lineari di superficie nello spazio; ho pensato perciò che valesse la pena di occuparsi di alcune classi di tali sistemi, ed in questa nota espongo i resultati a cui sono pervenuto relativamente ai sistemi semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche di genere $p > 1$. Più in generale risolvo la questione dello studio delle varietà a 3 dimensioni a curve sezioni (degli S_{r-2} in S_r) iperellittiche di genere $p > 1$ (3). A fine di non imporre alla ricerca limiti non necessarî, ho dovuto premettere lo studio completo delle superficie a sezioni (piane o iperpianali) iperellittiche, riguardo alle quali superficie è noto già un teorema del sig. Castelnuovo (Circolo Mat. di Palermo, 1890) relativo solamente a quelle di genere nu-

(1) Cfr. Caporali, *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane.*

(2) Cfr. Castelnuovo (l. c.).

(3) La condizione $p > 1$ sarà tacitamente supposta nel seguito del testo parlando di curve iperellittiche. Per completare i risultati quì ottenuti restano da considerare i casi particolari in cui $p = 1$ o $p = 0$. Ma il caso $p = 1$ presenta notevoli difficoltà non ancora superate (si pensi al dubbio circa la razionalità della varietà cubica di S_4). Nel caso in cui $p = 0$ si perviene invece senza difficoltà a ridurre a tipi i sistemi lineari semplici di superficie le cui intersezioni variabili sono curve razionali. Accenno ai resultati.

Una varietà di S_n a curve sezioni razionali si proietti da punti esterni in una V di S_4. Una superficie sezione iperpianale della V è una quadrica, o una rigata non quadrica, o una superficie di Steiner del 4° ordine.

Nel 1° caso la V è una quadrica, ed il sistema rappresentativo di essa su S_3 (rappresentandola con una proiezione) è quello delle quadriche per una conica.

Nel 2° caso si vede analogamente al § 3 di questa Nota che la V contiene un fascio razionale di piani (classe di varietà studiata dal sig. Segre nel lavoro: *Sulle varietà normali a 3 dimensioni composte di serie semplici razionali di piani.* Accad. di Torino 1885); la V si può rappresentare su S_3 assumendo come immagini delle sezioni iperpianali un sistema di superficie d'un certo ordine n con retta base (n-1) pla e (forse) altri elementi base (cfr. Segre l. c.).

Nel 3° caso la varietà V è del 4° ordine con retta tripla e tre piani doppi: essa contiene quindi una congruenza di rette sezioni dei piani per la retta tripla: ma una superficie di Steiner (sezione iperpianale di V) non può contenere una retta (semplice) senza ridursi ad un cono del 4° ordine, onde si deduce che la V è un cono le cui generatrici proiettano dal vertice i punti d'una superficie di Steiner: un tal cono è proiezione d'un cono del 4° ordine (normale) di S_6 le cui sezioni iperpianali sono superficie di Veronese (studiate dai sigg. Veronese e Segre): siffatti coni di S_6 non hanno invarianti assoluti, essi possono dunque tutti rappresentarsi col sistema delle quadriche di S_3 tangenti in un punto ad un piano fisso (ciò che può vedersi anche direttamente). Così si può dimostrare il teorema:

merico 0 (che riescono razionali). Così ho stabilito, e ciò mi sembra anche per sè stesso non privo d'interesse, che *ogni superficie a sezioni iperellittiche di genere* p (>1) *o contiene un fascio di coniche* (*ed è razionale*), *o è una rigata del genere* p (§ 2). Basandomi su questo resultato riesco ad estenderlo alle *varietà di 3 dimensioni* (e si potrebbe fare lo stesso per quelle di $r > 3$ dimensioni) *a curve sezioni iperellittiche*, dimostrando che *esse contengono un fascio di quadriche (e son razionali) oppure un fascio (serie semplice* ∞^1*) di piani*. Dalla rappresentazione che si ottiene nel 1° caso di quelle varietà su S_3 (nel 2° esse sono irrazionali) desumo che *ogni sistema lineare semplice di superficie le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche può con una trasformazione birazionale dello spazio trasformarsi in un sistema di superficie d'un certo ordine n, con una retta base* $(n-2)$ *pla, una curva base semplice incontrata in due punti variabili dai piani per la retta, e* (*forse*) *altri elementi base*.

« 2. Si abbia in S_3 dove può supporsi proiettata (da punti esterni) una superficie F a sezioni piane iperellittiche di genere p (>1). In primo luogo si osservi che se la F è razionale, sul piano rappresentativo di essa, il sistema delle immagini delle sue sezioni piane ha come *aggiunto puro* (cfr. Castelnuovo « Accad. di Torino — Memorie 1891 — cap. II ») un sistema ∞^{p-1} di curve spezzate ciascuna in $p-1$ d'un fascio, ed alle curve del fascio corrispondono coniche sopra la F, dimodochè i punti coniugati d'un punto generico O della F sulle sezioni piane per O appartengono alla conica del detto fascio che passa per O.

« Ora si supponga (se è possibile) che i coniugati d'un punto O della F sulle sezioni piane per O non stieno tutti sopra una medesima linea ma descrivano tutta la superficie; dico che se ne trae come conseguenza che la F è razionale ciò che per l'osservazione precedente dimostra l'assurdità della fatta ipotesi.

« Invero nella detta ipotesi (supposta possibile) ogni punto A della F è coniugato del punto O sopra un certo numero finito m di sezioni piane

---

Ogni sistema lineare semplice di superficie segantesi due a due secondo curve razionali può trasformarsi birazionalmente in uno dei seguenti:

1°) *sistema delle quadriche per una conica*;

2°) *sistema di quadriche tangenti in un punto ad un piano*;

3°) *sistema di superficie d'ordine* n *con retta base* $(n-1)$*pla e* (*forse*) *altri elementi base* (v. Segre l. c.).

Si può anche dimostrare che è semplice un sistema di superficie determinato dal gruppo base le cui intersezioni sono curve razionali, se ha la dimensione ≥ 3: questo è un corollario di un teorema più generale concernente la normalità del sistema di curve che le superficie d'un sistema determinato dal gruppo base segano sopra una superficie generica di esso.

per O, ed invece sopra ogni piano per O vi è *un* punto coniugato di O sulla curva sezione, dimodochè ad ogni piano per O corrisponde così un punto della F, e ad un punto della F un gruppo di m piani per O: per tal modo i punti della F vengono ad essere riferiti biunivocamente ai gruppi di una involuzione (di grado m) nella stella di piani col centro O (forma di 2ª specie); tanto basta per concludere, in base ad un recentissimo teorema del sig. Castelnuovo (¹), che la F è una superficie razionale come appunto avevamo enunciato. E siccome abbiam visto che questo fatto contraddice all'ipotesi da cui siamo partiti, si deduce che i punti coniugati del punto O sulle sezioni piane della F per esso descrivono necessariamente una curva. Un punto A di questa curva è coniugato del punto O sopra tutte le sezioni piane della F per OA, quindi la curva stessa è segata in un sol punto variabile dai piani per O ed è perciò una curva piana C d'un certo ordine n col punto O (n—1) plo.

« Ad ogni punto O della F corrisponde una siffatta curva C e sussiste la proprietà fondamentale che se la curva C corrispondente ad un punto O passa per un punto O′, la curva C′ corrispondente ad O′ passa per O. Da questa proprietà si deduce facilmente che deve essere $n = 1$ o $n = 2$: infatti se $n > 2$ la curva piana C avrebbe almeno un punto doppio in O, e quindi il piano della C sarebbe tangente in O alla F; per la nominata proprietà dovrebbero allora passare per O tutti i piani tangenti alla F nei punti della C, il che è assurdo giacchè la C non può essere spezzata in rette per O. Ciò posto si debbono distinguere due casi secondochè l'ordine della curva C corrispondente ad un punto generico O della F vale $n = 1$ o $n = 2$.

« *1° caso.* $n = 1$. La curva C corrispondente ad un punto O è una retta; ogni punto O′ della C ha come corrispondente una retta C′ per O, ed essendo O un punto generico della F (che non è dunque un cono col vertice in O) tutti i punti O′ hanno come corrispondente una stessa retta C′ per O, onde la F è una rigata iperellittica (di genere p) e su di essa le rette C,C′ sono coniugate.

« *2° caso.* $n = 2$. Ogni punto O appartiene alla corrispondente conica C: dico che tutti i punti d'una conica C danno come corrispondente la conica stessa di guisa che le coniche C formano un fascio (e quindi la superficie F è razionale). Suppongasi invero il contrario, cioè per ogni punto O′ d'una conica C (corrispondente al punto O) passi una conica C′ che corrisponde al punto stesso O′ (nel senso indicato), diversa dalla C: tutte le ∞^1 coniche analoghe alla C′ (formanti un sistema *razionale*) debbono passare per il punto O, e poichè esse non giacciono due a due in uno stesso piano, due siffatte coniche avranno comune un sol punto variabile al più; ma sia che le dette coniche formino un fascio, sia che s'incontrino due a due in *un* punto variabile (nel qual caso pel punto generico

(¹) *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* Rend. Accad. dei Lincei, 1893.

della F passa un certo numero $\nu > 1$ di dette coniche), la superficie F deve essere razionale; nel 1° caso per un teorema del sig. Noether [1], nel 2° perchè i suoi punti vengono riferiti ai gruppi d'una involuzione ∞^2 di grado ν sopra un sostegno razionale (la ∞^1 delle coniche); la razionalità della F è invece in contraddizione coll'ipotesi che le coniche C non compongano un fascio, per un'osservazione fatta in principio. Per evitare la contraddizione dobbiamo dunque ammettere che effettivamente le coniche C formino un fascio.

« Le conclusioni a cui siamo pervenuti riguardo alla superficie F si applicano in modo immutato ad una superficie a sezioni iperpianali iperellittiche in S_r $(r > 2)$, di cui la F sia proiezione da punti esterni; risulta così stabilito il teorema:

« *Una superficie le cui sezioni (piane o iperpianali) sono curve iperellittiche di genere $p > 1$ è*

1°) *o una rigata iperellittica di genere p,*

2°) *o una superficie razionale contenente un fascio di coniche.*

« 3. Nello studio delle varietà a 3 dimensioni di S_r le cui sezioni cogli S_{r-2} sono curve iperellittiche possiamo supporre senza introdurre alcuna restrizione che sia $r=4$, giacchè se $r > 4$ si potrà proiettare la varietà (da punti esterni) in S_4. Riferiamoci dunque alle varietà V di S_4 le cui sezioni piane sono curve iperellittiche.

« Le superficie intersezioni della V cogli iperpiani (S_3) di S_4 avendo le sezioni piane iperellittiche, sono rigate o contengono un fascio razionale di coniche.

« *1° caso.* Ogni sezione iperpianale della V contiene ∞^1 rette, ed ogni retta è comune ad ∞^2 iperpiani e quindi alle loro sezioni, sicchè sulla V si hanno ∞^3 rette: per un punto della V passa un cono di (∞^1) rette segato in *una* retta da ogni iperpiano per il punto, quindi per ogni punto della V passa *un* piano appartenente alla V: la varietà V contiene dunque un fascio di piani, ed il fascio (come una sezione piana di genere p) è iperellittico di genere p. In questo caso è certo impossibile rappresentare la varietà V punto per punto su S_3; in altre parole la V non è razionale.

« *2° caso.* Si considerino due punti O, O' coniugati sulla curva iperellittica sezione della V con un piano generico π, e per i detti punti O, O' si conduca un altro qualunque piano π': l'iperpiano determinato da π, π', sega la V secondo una superficie a sezioni iperellittiche contenente un fascio di coniche, sulla quale i punti $O O'$ appartengono ad una stessa conica del fascio; dunque i punti $O O'$ coniugati sopra una sezione piana generica della V, sono in conseguenza coniugati sopra ogni altra sezione piana della V passante per essi e possono dirsi (brevemente) coniugati sulla V. Vi sono per

[1] *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* (Mathem. Ann. Bd. III).

un punto O della V ∞^4 piani e su ciascuno di essi vi è un coniugato O′ di O; d'altra parte due punti coniugati O, O′ appartengono ad ∞^2 piani, quindi il luogo dei punti O′ coniugati ad un punto fisso O sulla V è una superficie: un iperpiano per O sega questa superficie secondo la conica luogo dei coniugati di O sulla sezione iperpianale, dunque la superficie stessa è una quadrica. Così si vede come alla V appartengano ∞^1 quadriche (almeno) ciascuna corrispondente ad un punto (luogo dei coniugati di esso). Dico che ciascun punto di una di tali quadriche ha come corrispondente la quadrica stessa e però le dette quadriche formano un fascio. Invero si consideri un punto O′ sulla quadrica corrispondente al punto O: allora la quadrica stessa può generarsi come luogo delle coniche corrispondenti ad O sulle sezioni iperpianali d'un fascio per O O′; ma tali coniche (luogo dei coniugati di O sulle dette sezioni iperpianali) corrispondono anche (nel senso indicato) al punto O′, onde colla medesima generazione si ottiene sulla V la quadrica corrispondente ad O′, la quale coincide dunque con quella corrispondente ad O come appunto dovevasi dimostrare. Rimane così stabilito che se la V a sezioni piane iperellittiche ha per sezioni iperpianali superficie razionali (caso che stiamo trattando), essa contiene un fascio di quadriche, ciascuna luogo di ∞^4 coppie di punti coniugati sulla V; il fascio di quadriche così costruito sulla V è razionale come l'involuzione g'_2 che esso determina sopra una sezione piana.

« Ora, se accade che l'iperpiano contenente una quadrica del fascio sulla V contenga altre quadriche del fascio stesso, possiamo trasformare la V in un'altra varietà W contenente pure un fascio di quadriche di cui due non stieno in uno stesso iperpiano ed in modo che le quadriche del fascio sulla W e quelle sulla V si corrispondono una ad una proiettivamente. Infatti basta per ciò riferire proiettivamente gli elementi (quadriche) del fascio sulla V agli iperpiani per un piano π in S_4, e proiettare ciascuna quadrica sul corrispondente iperpiano da un punto O fuori di π; il luogo dei punti ottenuti è la varietà W riferita biunivocamente alla V nell'anzidetto modo.

« Ciò posto una sezione iperpianale della W contiene un fascio razionale di coniche e però possiede (secondo Noether) delle curve direttrici K seganti in un punto ciascuna conica: vi sono dunque sulla varietà W delle curve K seganti in un sol punto ogni quadrica del fascio che essa possiede. Allora preso in S_4 un S_3 si può rappresentare la W punto per punto su S_3 proiettando i punti di ciascuna quadrica del fascio dal punto intersezione di essa colla curva K. Si ottiene in conseguenza la rappresentazione birazionale della V su S_3, ed anche in questa rappresentazione (come in quella della W) le quadriche del fascio appartenente alla varietà vengono rappresentate sui piani d'un fascio, e ciascuna ha come immagini delle sezioni piane sul piano corrispondente, le coniche d'un sistema ∞^3 con due punti base.

« Siamo così pervenuti al teorema:

« *Una varietà a 3 dimensioni a curve sezioni (degli* S_{r-2} *in* S_r*) iperellittiche di genere* p (>1) *è*

« 1° *o una* ∞^1 *semplice di piani (fascio), del genere* p;

« 2° *o una varietà razionale contenente un fascio di quadriche.*

« 4. Un sistema lineare di superficie nello spazio S_3 in cui il passaggio d'una superficie per un punto non trae di conseguenza il passaggio di essa per altri punti variabili con esso (cioè un sistema *semplice*), si può considerare come il sistema delle immagini delle sezioni iperpianali d'una varietà a 3 dimensioni riferita punto per punto allo spazio S_3. Una varietà razionale a curve sezioni iperellittiche appartiene necessariamente al 2° dei tipi considerati e quindi può riferirsi ad S_3 in modo che alle sue quadriche corrispondano i piani d'un fascio ed ogni quadrica sia rappresentata sul corrispondente piano dal sistema delle coniche con due punti base: in conseguenza il sistema rappresentativo delle sezioni iperpianali della varietà sega ciascun piano del nominato fascio secondo il detto sistema di coniche con due punti base, e ad un siffatto sistema può ricondursi con una trasformazione birazionale dello spazio ogni altro sistema rappresentativo della varietà.

« Così si deduce che:

« *Un sistema lineare semplice di superficie che ha come intersezioni variabili curve iperellittiche (di genere* $p>1$*) può trasformarsi con una trasformazione cremoniana dello spazio in un sistema lineare di superficie d'un certo ordine* n *con una retta base* $(n-2)$*pla, una curva base semplice segante in due punti variabili i piani per la retta, e (forse) altri elementi base.*

« È chiaro che viceversa in un tal sistema di superficie le intersezioni variabili sono curve iperellittiche ».

Geodesia. — *Sulla determinazione dei raggi di curvatura di una superficie per mezzo di misure locali sopra di essa.* Nota di Vincenzo Reina, presentata dal Socio Beltrami.

« 1. Christoffel ha dimostrato in una notissima Memoria (1), che se la superficie di un corpo di dimensioni finite è dappertutto convessa, ha la curvatura variabile in modo continuo ed i raggi principali di curvatura finiti (fatta eccezione tutt'al più per punti isolati), essa riesce determinata nello spazio, a meno di una traslazione, e con quella approssimazione che si vuole, quando, insieme alle coordinate sferiche dello *zenit vero* di un nu-

(1) *Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben.* Crelle's Journal, Bd. 64.