ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

« Siamo così pervenuti al teorema:

« *Una varietà a 3 dimensioni a curve sezioni (degli* S_{r-2} *in* S_r*) iperellittiche di genere p* (>1) *è*

« 1° *o una* ∞^1 *semplice di piani (fascio), del genere p;*

« 2° *o una varietà razionale contenente un fascio di quadriche.*

« 4. Un sistema lineare di superficie nello spazio S_3 in cui il passaggio d'una superficie per un punto non trae di conseguenza il passaggio di essa per altri punti variabili con esso (cioè un sistema *semplice*), si può considerare come il sistema delle immagini delle sezioni iperpianali d'una varietà a 3 dimensioni riferita punto per punto allo spazio S_3. Una varietà razionale a curve sezioni iperellittiche appartiene necessariamente al 2° dei tipi considerati e quindi può riferirsi ad S_3 in modo che alle sue quadriche corrispondano i piani d'un fascio ed ogni quadrica sia rappresentata sul corrispondente piano dal sistema delle coniche con due punti base: in conseguenza il sistema rappresentativo delle sezioni iperpianali della varietà sega ciascun piano del nominato fascio secondo il detto sistema di coniche con due punti base, e ad un siffatto sistema può ricondursi con una trasformazione birazionale dello spazio ogni altro sistema rappresentativo della varietà.

« Così si deduce che:

« *Un sistema lineare semplice di superficie che ha come intersezioni variabili curve iperellittiche (di genere* $p>1$*) può trasformarsi con una trasformazione cremoniana dello spazio in un sistema lineare di superficie d'un certo ordine n con una retta base* $(n-2)$*pla, una curva base semplice segante in due punti variabili i piani per la retta, e (forse) altri elementi base.*

« È chiaro che viceversa in un tal sistema di superficie le intersezioni variabili sono curve iperellittiche ».

Geodesia. — *Sulla determinazione dei raggi di curvatura di una superficie per mezzo di misure locali sopra di essa.* Nota di Vincenzo Reina, presentata dal Socio Beltrami.

« 1. Christoffel ha dimostrato in una notissima Memoria [1], che se la superficie di un corpo di dimensioni finite è dappertutto convessa, ha la curvatura variabile in modo continuo ed i raggi principali di curvatura finiti (fatta eccezione tutt'al più per punti isolati), essa riesce determinata nello spazio, a meno di una traslazione, e con quella approssimazione che si vuole, quando, insieme alle coordinate sferiche dello *zenit vero* di un nu-

[1] *Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben.* Crelle's Journal, Bd. 64.

mero sufficiente de'suoi punti, sia determinata la somma dei raggi principali di curvatura nei punti stessi.

« Per *zenit vero* di un punto P della superficie qui s'intende il punto della sfera celeste (di raggio infinitamente grande) in cui questa è intersecata dalla normale in P alla superficie, eretta sulla sua faccia accessibile.

« Nel penultimo paragrafo della sua Memoria, Christoffel perviene alle espressioni delle coordinate x, y, z dei punti della superficie, e cioè ad integrali definiti contenenti linearmente la somma R_1+R_2 dei due raggi principali di curvatura, considerata come funzione delle coordinate sferiche dello zenit vero. Ma quanto alla possibilità di poter praticamente determinare questa funzione, egli si esprime in questi termini:

« Die Grundlage zur wirklichen Ausführung dieses Verfahren ist in dem « Satze zu suchen, dass ein stetig gekrümmtes, hinlänglich kleines Stück jeder « beliebigen Oberfläche als einer Fläche zweiten Grades angehörig betrachtet « werden kann. Die letztere muss für jedes passend gewählte Stück T der « zur Untersuchung vorgelegten Fläche durch Messungen von derselben Art « bestimmt werden, wie man sie bisher zur Bestimmung des ganzen « Erdsphäroids ausgeführt hat, und liefert dann für die Punkte des genauesten Anschlusses an T das wahre Zenith und die Summe der beiden « Hauptkrümmungshalbmesser ».

« Questo passo per il quale la determinazione di R_1+R_2 vien fatta dipendere da un procedimento puramente approssimato, mi indusse a ricercare se non sia possibile dirigere le misure locali in modo da pervenire più rapidamente e più sicuramente ai valori di R_1 e di R_2.

« Il risultato di queste ricerche è esposto nei paragrafi seguenti, nei quali è lecito rimuovere taluna delle ipotesi restrittive fatte da Christoffel, in particolare quella relativa al segno della curvatura.

« Si supporrà soltanto che le coordinate x, y, z dei punti della superficie, considerate come dipendenti da due parametri, siano funzioni finite e continue colle loro derivate prime, seconde e terze, fatta eventualmente esclusione per punti isolati.

« 2. Per un punto P della superficie si tracci una geodetica, e sia s l'arco di questa intercetto fra un suo punto fisso (origine degli archi) ed il punto P, $\alpha\beta\gamma$ i coseni di direzione della tangente PT alla geodetica, diretta positivamente nel senso in cui cresce l'arco. Siano ancora XYZ i coseni di direzione della normale PN alla superficie, eretta positivamente sopra una determinata delle due faccie della superficie, ma che qui non importa precisare, e $\xi\eta\zeta$ i coseni di direzione della binormale PB, diretta positivamente in modo che le tre rette PT, PB, PN stiano fra loro come le direzioni positive degli assi delle x, delle y, delle z.

« Se si indicano con ϱ e τ i raggi di flessione e di torsione della curva, presi col valore positivo o negativo a seconda che i centri di flessione e di torsione cadono sulle direzioni positive o negative di PN e di PB, per le formole di Frenet si avrà:

$$1)\qquad \begin{cases} dX = -\left(\dfrac{\alpha}{\varrho} + \dfrac{\xi}{\tau}\right) ds \\[2ex] dY = -\left(\dfrac{\beta}{\varrho} + \dfrac{\eta}{\tau}\right) ds \\[2ex] dZ = -\left(\dfrac{\gamma}{\varrho} + \dfrac{\zeta}{\tau}\right) ds. \end{cases}$$

« Si immagini ancora tracciata per P la geodetica nella direzione coniugata di PT, e si indichino colle stesse lettere accentate gli analoghi elementi ad essa relativi. Se si pone

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos\omega\,,$$

cioè si indica con ω l'angolo fra le due direzioni coniugate, si avrà (¹)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\tau}{\varrho}\,,$$

e le 1) diverranno

$$2)\qquad \begin{cases} dX = -\dfrac{1}{\varrho \operatorname{sen}\omega}\,(\alpha \operatorname{sen}\omega + \xi\cos\omega)\, ds \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

« Ma per le fatte convenzioni si ha

$$\begin{aligned} \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' &= \operatorname{sen}\omega \\ \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= \cos\omega \\ X\xi' + Y\eta' + Z\zeta' &= 0\,, \end{aligned}$$

e queste equazioni, risolute rispetto a $\xi'\eta'\zeta'$, danno

$$\xi' = \alpha \operatorname{sen}\omega + \xi\cos\omega$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

ne segue che le 2) si potranno ridurre alla forma monomia:

$$3)\qquad dX = -\frac{\xi'}{\varrho\operatorname{sen}\omega}\,ds \qquad dY = -\frac{\eta'}{\varrho\operatorname{sen}\omega}\,ds \qquad dZ = -\frac{\zeta'}{\varrho\operatorname{sen}\omega}\,ds\,.$$

« Insieme alla normale PN si consideri la normale alla superficie nel punto $(s+ds)$ della geodetica s, si determini la minima distanza fra le due normali, e si indichi con r il segmento della PN intercetto fra il punto P e il piede di questa minima distanza, segmento che si intenderà preso collo stesso segno di ϱ.

« Si elimini ω dalle 3) per mezzo della nota relazione (²)

$$4)\qquad r = \varrho \operatorname{sen}^2\omega\,;$$

(¹) Cfr. la mia Nota: *Sulle linee coniugate di una superficie*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. VI, 1890.

(²) Joachimstahl, *Sur les normales infiniment voisines d'une surface courbe*. Journ. de Math. pures et appl., t. XIII, 1848.

esse si ridurranno alla forma

$$5)\qquad dX = \frac{\xi'}{\sqrt{r\varrho}}\,ds \qquad dY = \frac{\eta'}{\sqrt{r\varrho}}\,ds \qquad dZ = \frac{\zeta'}{\sqrt{r\varrho}}\,ds\,,$$

nelle quali formole il radicale andrà preso negativamente o positivamente, secondo che r e ϱ sono positivi o negativi.

« Se poi si pone

$$\xi' = \frac{\partial x}{\partial n'}, \qquad \eta' = \frac{\partial y}{\partial n'}, \qquad \zeta' = \frac{\partial z}{\partial n'}\,,$$

cioè con dn' si intende l'elemento lineare della superficie condotto per P normalmente alla curva s', nel senso positivo della binormale alla stessa curva s', le precedenti relazioni si potranno ancora porre sotto la forma più significativa

$$6)\qquad \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\frac{\partial x}{\partial n'} \qquad \frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\frac{\partial y}{\partial n'} \qquad \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\frac{\partial z}{\partial n'}\,,$$

nelle quali si è introdotto il segno di derivata parziale per meglio esprimere che le differenziazioni si riferiscono a direzioni diverse.

« Queste formole, le quali possono considerarsi come una estensione di quelle di O. Rodrigues, per un'altra via, e sotto una forma meno semplice, furono già da me stabilite in altra Nota [1].

« 3. Da queste formole si vogliono trarre qui alcune conseguenze.

« Sia $d\varepsilon$ l'angolo fra due normali alla superficie condotte per gli estremi di un elemento ds della curva s, uvw i coseni di direzione della loro minima distanza.

« Si avrà

$$u = \frac{YdZ - ZdY}{d\varepsilon} \qquad v = \frac{ZdX - XdZ}{d\varepsilon} \qquad w = \frac{XdY - YdX}{d\varepsilon}\,,$$

e da queste, in virtù delle 5), si otterrà

$$u\xi' + v\eta' + w\zeta' = 0\,,$$

la quale mostra che la minima distanza fra le due normali alla superficie, condotte per gli estremi di un elemento ds, ha una direzione coniugata a quella di ds [2].

« Se si eguagliano i secondi membri delle 1) e delle 5) si ottiene:

$$\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\xi}{\tau} = \frac{\xi'}{\sqrt{r\varrho}}$$

$$\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\eta}{\tau} = \frac{\eta'}{\sqrt{r\varrho}}$$

$$\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\zeta}{\tau} = \frac{\zeta}{\sqrt{r\varrho}}\,.$$

(1) *Di alcune formole relative alla teoria delle superficie*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. VI, 1890.

(2) Cfr. la mia Nota: *Sulla teoria delle normali a una superficie*. Rendic. della R. Acc. di Napoli, marzo 1890.

« Se queste si moltiplicano per $\alpha\beta\gamma$ e si sommano, poi per $\xi\,\eta\,\zeta$ e si sommano, avuto riguardo alle due relazioni

$$\Sigma\alpha\xi' = \operatorname{sen}\omega \qquad \Sigma\xi\xi' = \cos\omega\,,$$

si ottiene

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{r\varrho}} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{r\varrho}}$$

e da queste si ricavano le altre due:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\varrho} + \frac{\cos\omega}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\,,$$

$$\frac{\cos\omega}{\varrho} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\tau} = 0\,.$$

« Si scrivano le formole:

$$7)\qquad \frac{\partial X}{\partial s'} = \frac{1}{\sqrt{r'\varrho'}}\frac{\partial x}{\partial n} \qquad \frac{\partial Y}{\partial s'} = \frac{1}{\sqrt{r'\varrho'}}\frac{\partial y}{\partial n} \qquad \frac{\partial Z}{\partial s'} = \frac{1}{\sqrt{r'\varrho'}}\frac{\partial z}{\partial n}\,,$$

che valgono per la direzione ds' coniugata di ds, e queste si moltiplichino membro a membro per le 6), sommando quindi i risultati. Si otterrà:

$$\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial s'} + \frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s'} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial Z}{\partial s'} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho\, r'\varrho'}}\cos\omega\,;$$

ma se $R_1\,R_2$ sono i due raggi principali di curvatura della superficie, si ha [1]

$$R_1\,R_2 = r\varrho' = r'\varrho\,,$$

e la precedente relazione condurrà quindi alla seguente nuova espressione della *curvatura gaussiana*.

$$\frac{1}{R_1\,R_2} = \frac{1}{\cos\omega}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial s'} + \frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s'} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial Z}{\partial s'}\right).$$

« 4. Dalle 6) e 7) si ricava:

$$8)\qquad \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r\varrho}} \qquad \frac{d\varepsilon'}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{r'\varrho'}}\,,$$

quando a $d\varepsilon$ si attribuisca il significato già detto, e con $d\varepsilon'$ si intenda analogamente l'angolo fra le due normali alla superficie condotte per gli estremi dell'elemento ds'. Se ai radicali si attribuisce il segno nel modo già dichiarato, gli elementi angolari $d\varepsilon\, d\varepsilon'$ saranno da considerarsi negativi o positivi secondo che le coppie di normali che li determinano convergono verso la loro parte positiva, oppure verso la negativa. Moltiplicando membro a membro le due relazioni, si ottiene quest'altra espressione semplicissima della curvatura gaussiana:

$$9)\qquad \frac{1}{R_1\,R_2} = \frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d\varepsilon'}{ds'}\,.$$

« Una espressione altrettanto semplice si può ottenere per la *curvatura*

[1] Cfr. la mia Nota: *Di alcune proprietà delle linee caratteristiche*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei. vol. V, 1889.

media $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Le 8), avuto riguardo alla 4) ed alla relazione analoga:

$$r' = \varrho' \operatorname{sen}^2 \omega ,$$

si possono anche scrivere:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{r} \qquad \frac{d\varepsilon'}{ds'} = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{r'},$$

quindi sommando

$$\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{d\varepsilon'}{ds'} = -\operatorname{sen}\omega\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right);$$

e da questa, per la nota relazione

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},$$

si ricava

10) $$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left(\frac{d\varepsilon}{ds}+\frac{d\varepsilon'}{ds'}\right).$$

« Le 9) 10) conducono a questa notevole conseguenza che *se è noto l'angolo* ω *fra due elementi coniugati* ds ds' *uscenti da* P, *e si determinano gli angoli* $d\varepsilon$ $d\varepsilon'$ *fra le coppie di normali alla superficie condotte per gli estremi di* ds *e di* ds', *si potranno determinare i raggi principali di curvatura della superficie, come radici dell'equazione*

11) $$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left(\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon}+\frac{d\varepsilon'}{ds'}\right)\frac{1}{R}+\frac{d\varepsilon}{ds}\frac{d\varepsilon'}{ds'} = 0.$$

« Dato un elemento qualunque ds uscente da P, la direzione del suo coniugato si determina così: Si conduca per P la normale alla superficie e la parallela alla normale corrispondente al secondo estremo di ds. La perpendicolare in P al piano di queste due rette segna la direzione di ds'.

« Data una superficie qualunque si potrà quindi, per questa via, cioè mediante misure locali sopra di essa determinarne i raggi principali di curvatura. Ma prima di mostrare come questo procedimento sia praticamente applicabile alla determinazione della curvatura delle *onde geoidiche*, è bene indicare come i precedenti risultati, grazie alla loro semplicità, si possano in gran parte ottenere con considerazioni geometriche.

« 5. Insieme alla superficie si consideri la sua rappresentazione sferica. Siano P e P' due punti infinitamente vicini della superficie ($PP' = ds$), p e p' le corrispondenti immagini sferiche ($pp' = d\varepsilon$).

« I piani tangenti in P e P' alla superficie si intersecano secondo una retta che definisce la direzione coniugata di PP' e che è perpendicolare alle due normali nei punti stessi P e P'; dunque la minima distanza fra le due normali ha una direzione coniugata a quella di PP'.

« I piani tangenti in p e p' alla sfera sono paralleli ai piani tangenti in P e P' alla superficie: l'intersezione dei primi, che è normale a pp' sarà quindi parallela alla direzione coniugata di PP'. Si potrà anche dire che l'elemento pp' della rappresentazione sferica ha una direzione normale alla direzione coniugata di PP′, epperò, ritenute le precedenti notazioni, si potrà scrivere:

$$\frac{dX}{d\varepsilon} = \pm \frac{dx}{dn'} \qquad \frac{dY}{d\varepsilon} = \pm \frac{dy}{dn'} \qquad \frac{dZ}{d\varepsilon} = \pm \frac{dz}{dn'} .$$

« Queste relazioni riproducono le 6), quando vi si ponga

$$d\varepsilon = \frac{ds}{\sqrt{r\varrho}} .$$

« Da quanto precede risulta che la rappresentazione sferica stabilisce una relazione di eguaglianza fra gli angoli formati dalle coppie di elementi coniugati della superficie, e quelli formati dalle coppie di elementi corrispondenti della sfera. Si considerino allora sulla superficie due elementi coniugati $PP_1 = ds$, $PP'_1 = ds'$ comprendenti l'angolo ω e per P_1 e P_1' si immaginino tracciati i due elementi coniugati a P_1P e $P_1'P$ rispettivamente. Si otterrà un parallelogrammo infinitesimo avente per area

$$ds\, ds' \operatorname{sen} \omega .$$

« Ad esso corrisponderà sulla sfera un altro parallelogrammo infinitesimo i cui lati adiacenti $d\varepsilon$ e $d\varepsilon'$ racchiuderanno lo stesso angolo ω, e la cui area sarà quindi misurata da

$$d\varepsilon\, d\varepsilon' \operatorname{sen} \omega .$$

« Il teorema di Gauss darà pertanto

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{d\varepsilon}{ds} \frac{d\varepsilon'}{ds'} .$$

« Condotte le due normali alla superficie in P e P_1, si tiri dal punto O, in cui la loro minima distanza incontra la prima, una parallela alla seconda ad incontrare la superficie in Q, e si coniuga Q con P e con P_1. Nel triangoletto PP_1Q rettangolo in Q si avrà

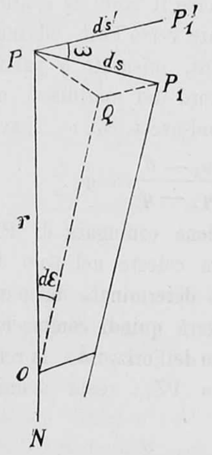

Fig 1.

$$P_1 \hat{P} Q = \frac{\pi}{2} - \omega \qquad PQ = r d\varepsilon = ds \operatorname{sen} \omega ,$$

quindi, astrazion fatta dal segno,

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{r} .$$

« L'analoga costruzione ripetuta per l'elemento ds' dà

$$\frac{d\varepsilon'}{ds'} = \frac{\operatorname{sen} \omega}{r} ,$$

e dalla combinazione di queste due relazioni si riottiene la 10).

« 6. Mostriamo ora come ed in quali condizioni la 11) possa praticamente applicarsi alla determinazione della curvatura delle *onde geoidiche*.

« Si misuri la distanza geodetica s fra due punti P e P_1 del geoide, e per mezzo di osservazioni astronomiche si determini la differenza di latitudine $\varphi_1 - \varphi$ e la differenza di longitudine $\theta_1 - \theta$ fra i punti stessi. Circoscritta al punto P una sfera di raggio unitario, si effettui su questa, dal centro, la proiezione della sfera celeste, poi di questa immagine si faccia la proiezione stereografica sul piano dell'orizzonte in P, per modo che lo zenit Z del punto P venga rappresentato dallo stesso punto P. Siano ancora N, Z_1, Q le proiezioni del polo Nord, dello zenit di P_1 e del punto in cui il parallelo di Z_1 incontra il meridiano di P (rappresentato dalla retta NP). Si avrà

$$PQ = \varphi_1 - \varphi \qquad P\hat{N}Z_1 = \theta_1 - \theta \qquad PN = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad Z_1 N = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

e dal triangolo sferico QNZ_1, attesa la piccolezza della differenza θ_1-θ fra le longitudini dei due punti, fra cui le misure geodetiche in questione potranno effettuarsi, si ricaverà

$$QZ_1 = (\theta_1 - \theta) \cos \varphi_1 .$$

« L'angolo fra le due normali in P e P_1, rappresentato in proiezione da PZ_1, sarà quindi misurato da

$$12) \quad \Delta\varepsilon_1 = \sqrt{(\varphi_1 - \varphi)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 \cos^2 \varphi_1} \, .$$

« Quando con osservazioni astronomiche si sia determinata la direzione del meridiano di P, sarà rispetto ad esso definito anche l'azimut del piano verticale PZZ_1, ossia della retta PZ_1, perchè supponendo contata la latitudine positivamente verso il nord, la longitudine positivamente verso l'est, ed indicando tale azimut, misurato a partire dalla direzione nord del meridiano, nel senso nord-est-sud-ovest, con α_1, si avrà

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\theta_1 - \theta}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi_1 .$$

« La direzione coniugata di PP_1 incontra la sfera celeste nel polo del cerchio massimo determinato dai punti ZZ_1: essa si otterrà quindi conducendo per P, nel piano dell'orizzonte, la retta perpendicolare a PZ_1, ossia definita dall'azimut

$$\alpha_1 + \frac{\pi}{2} .$$

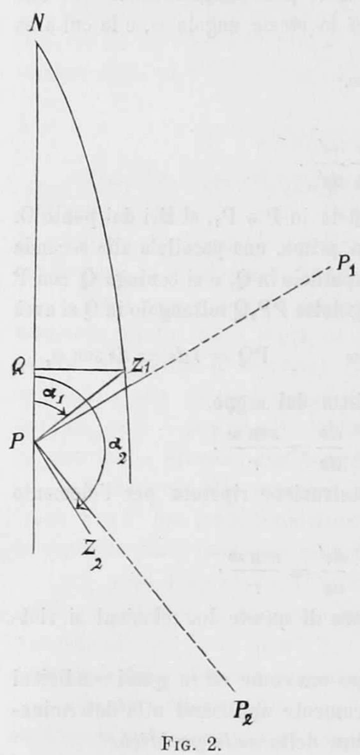

Fig. 2.

« Si assuma in questa direzione, ed alla distanza s_2 da P un altro punto P_2, e si determinino analogamente le differenze di latitudine e di longitudine $\varphi_2 - \varphi$ e $\theta_2 - \theta$. L'angolo fra le normali in P e P_2 al geoide sarà

$$\Delta\varepsilon_2 = \sqrt{(\varphi_2 - \varphi)^3 + (\theta_2 - \theta)^2 \cos^2\varphi_2}\,, \tag{13}$$

e l'azimut α_2 del piano PZZ_2 sarà dato dall'equazione

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\theta_2 - \theta}{\varphi_2 - \varphi} \cos \varphi_2\,.$$

« Ne segue che l'angolo fra le due direzioni coniugate sarà

$$\omega = \alpha_1 - \alpha_2 \pm \pi\,. \tag{14}$$

« I valori 12) 13) 14), introdotti nell'equazione

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} \omega}\left(\frac{\Delta\varepsilon_1}{s_1} + \frac{\Delta\varepsilon_2}{s_2}\right)\frac{1}{R} + \frac{\Delta\varepsilon_1}{s_1}\,\frac{\Delta\varepsilon_2}{s_2} = 0\,, \tag{15}$$

permetteranno di determinare i due raggi principali di curvatura nel punto P.

« Se, come si usa in geodesia, le differenze $\varphi_1 - \varphi$, $\theta_1 - \theta$... si suppongono espresse in secondi d'arco, l'ultima equazione andrà scritta sotto la forma:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{\operatorname{sen} 1''}{\operatorname{sen} \omega}\left(\frac{\Delta\varepsilon_1}{s_1} + \frac{\Delta\varepsilon_2}{s_2}\right)\frac{1}{R} + \operatorname{sen}^2 1''\,\frac{\Delta\varepsilon_1}{s_1}\,\frac{\Delta\varepsilon_2}{s_2} = 0.$$

« Tutte le precedenti relazioni valgono nell'ipotesi di una superficie analitica, per la quale siano verificate le condizioni enunciate nel § 1, la quale quindi abbia la curvatura variabile con continuità. Ora H. Bruns ha dimostrato (¹) che il geoide nel suo percorso attraverso alla crosta terrestre non è dappertutto rappresentabile mediante un'unica espressione analitica; esso è da considerarsi piuttosto come risultante dalla connessione di pezzi di superficie analitiche diverse, corrispondentemente ai diversi strati materiali da essi attraversati. La connessione ha luogo in modo che, nelle regioni di trapasso dall'un pezzo all'altro, non si producono nè spigoli nè vertici, ma ivi subiscono però delle discontinuità la curvatura delle sezioni normali, la curvatura media, la curvatura gaussiana, e gli azimut delle linee di curvatura.

« Questo fatto trae seco una notevole limitazione nella applicabilità della 15), allo scopo di determinare le dimensioni delle onde geoidiche. Essa si potrà però usare nelle grandi pianure, dove la uniformità di costituzione del terreno dia sicuro affidamento, che la superficie geoidica non soffra troppo rapide variazioni nella sua curvatura ».

Fisica. — *Ulteriori ricerche sui processi di deformazione* (²). Nota del dott. M. Cantone, presentata dal Socio Blaserna.

« I fisici che si sono occupati delle proprietà elastiche hanno sperimentato in condizioni assai differenti. Alcuni hanno usato quelle cautele che si richiedono per discostarsi il meno possibile dalla teoria; altri, visto come fosse

(¹) *Ueber einen Satz der Potentialtheorie*. Crelle's Journ, Bd. 81, 1876; *Die Figur der Erde*. Publication des königl. preuss. geodät. Institutes, 1878.

(²) Lavoro eseguito nel laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.