ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 6 agosto 1893.

Matematica. — *Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in poliedri regolari.* Nota del Corrispondente Luigi Bianchi.

« È noto, per le ricerche di Poincarè (¹), che il problema di costruire i gruppi discontinui di sostituzioni lineari sopra una variabile complessa equivale a quello della divisione regolare dello spazio non-euclideo in poliedri elementari congruenti. Lo studio di questi gruppi dà quindi luogo a due diverse questioni e cioè: 1° Definito aritmeticamente il gruppo, cercare la divisione regolare corrispondente dello spazio; 2° Data una divisione regolare dello spazio, trovare la definizione aritmetica del gruppo corrispondente. Mi sono occupato della prima questione in una serie di lavori inseriti nei vol. 38, 40 e 42 dei « Mathematische Annalen ». Nella presente Nota mi propongo di trattare quei casi particolari della seconda in cui i poliedri congruenti, che effettuano la divisione dello spazio non-euclideo, sono poliedri regolari. Come si vedrà, esistono due sole divisioni di questa specie: l'una in ottaedri, l'altra in dodecaedri regolari con angoli diedri retti in ambedue i casi. Il gruppo corrispondente alla prima divisione è semplicemente quello delle sostituzioni lineari $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ a coefficienti interi complessi di Gauss della forma $m+ni$ (²) con determinante eguale a una delle quattro unità $\pm 1, \pm i$. I coefficienti

(¹) *Sur le groupes Kleinéens.* Acta Mathem. Bd. 3.

(²) m, n razionali interi.

del secondo gruppo sono invece interi algebrici formati, in un certo modo, colla radice quinta dell'unità e coll'irrazionalità $\sqrt[4]{5}$.

« 1. Per maggiore chiarezza ricordiamo brevemente le proprietà fondamentali delle due rappresentazioni dello spazio non-euclideo sullo spazio ordinario, di cui dovremo far uso in questa Nota.

« L'elemento lineare dello spazio non-euclideo S, a curvatura $K = -1$, può assumersi dato dalla formola

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2}{t^2},$$

ove

$$t = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

e riguardando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio ordinario S′ si ha la rappresentazione di Beltrami-Klein di S sopra S′. In essa tutto lo spazio non-euclideo S è rappresentato entro la sfera limite (assoluto) di S′

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

i punti alla cui superficie rappresentano i punti all'infinito di S. Le rette ed i piani di S hanno per immagini le rette ed i piani di S′.

« La seconda rappresentazione si ottiene dalla formola

$$ds^2 = \frac{4(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{(1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2)^2},$$

che dà nuovamente l'elemento lineare di S, riguardando ancora $\xi\ \eta\ \zeta$ quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio ordinario S′. A differenza della prima che conserva gli angoli solo attorno al centro di figura, questa conserva dappertutto gli angoli: *è una rappresentazione conforme*; in essa le rette ed i piani dello spazio non-euclideo S hanno per immagini i circoli e le sfere ortogonali alla sfera limite

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

i cui punti interni rappresentano i punti a distanza finita di S e i punti alla superficie i punti all'infinito.

« Con una inversione per raggi vettori reciproci la sfera limite può ridursi, come nelle ricerche di Poincarè, ad un piano limite; corrispondentemente l'elemento lineare di S prende la forma

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2}$$

e i punti con ordinata ζ positiva rappresentano i punti a distanza finita di S.

« 2. Per risolvere il problema che ci siamo proposti della divisione regolare dello spazio non-euclideo in poliedri regolari, cominciamo dall'osservare che la rappresentazione di Beltrami-Klein ci dà un modo semplicissimo di costruire tutti i poliedri regolari in S colle considerazioni seguenti:

« Un poliedro regolare di S dovendo avere per immagine in questa rappresentazione un poliedro con faccie piane tutte di un egual numero di lati ed angoli solidi di un egual numero di spigoli, è chiaro che la discussione elementare ordinaria per classificare i poliedri regolari in cinque tipi, fondata sul teorema d'Eulero, vale immutata nel caso attuale. Di più dalle note ricerche di Klein sui gruppi finiti di sostituzioni lineari risulta facilmente che un poliedro regolare dello spazio non-euclideo può sempre rappresentarsi sullo spazio ordinario in guisa che il poliedro immagine in S′ sia esso stesso regolare ed abbia il centro nel centro della sfera limite.

« Viceversa se nello spazio rappresentativo S′ prendiamo un poliedro regolare col centro nel centro della sfera limite e tutto interno a questa sfera, o al massimo inscritto in essa (1), il poliedro obiettivo nello spazio non-euclideo sarà, come è chiaro, regolare. Come si vede, esistono adunque nello spazio non-euclideo poliedri regolari dei cinque tipi ed in ogni tipo si hanno infiniti poliedri differenti per l'ampiezza del diedro, che può variare *in modo continuo* entro limiti facili ad assegnarsi.

« 3. Ora se vogliamo che attorno al poliedro regolare P di S collocando, aderenti per le faccie, altrettanti poliedri eguali a P e così di seguito indefinitamente, ne risulti riempito una ed una sola volta lo spazio S, dovremo aggiungere la condizione necessaria e sufficiente che l'angolo diedro di P abbia un'ampiezza $=\frac{\pi}{n}$, essendo n un numero intero.

« Conviene distinguere due casi secondo che i vertici di P sono all'infinito ovvero a distanza finita. Cominciando dal primo e servendoci della rappresentazione conforme al n. 1, dovremo inscrivere nella sfera limite Σ un ordinario poliedro regolare e pei circoli d'intersezione delle faccie del poliedro con Σ condurre le sfere normali a Σ; il poliedro a faccie sferiche che queste sfere limitano internamente a Σ dovrà avere un angolo diedro d'ampiezza $\frac{\pi}{n}$. Ora si vede subito che le sfere descritte hanno i centri nei vertici del poliedro regolare circoscritto a Σ polare del primitivo, onde l'angolo diedro in discorso è misurato dall'angolo rettilineo racchiuso dai due raggi, che dal centro di una faccia del secondo poliedro vanno a due suoi vertici adiacenti. Se ne conclude che la circostanza voluta si presenta soltanto per l'ottaedro regolare, ove si avrà $n=2$.

« Nel secondo caso, i vertici essendo a distanza finita, si consideri l'angolo solido in un vertice del poliedro. A questo angolo solido regolare il cui diedro deve avere un'ampiezza $=\frac{\pi}{n}$ potremo applicare i teoremi dell'ordinaria

(1) In quest'ultimo caso il poliedro obiettivo in S avrà tutti i suoi vertici a distanza infinita e gli angoli piani nulli.

triedrometria che valgono, come è noto, anche per lo spazio non-euclideo [1]. Una discussione elementare semplicissima porta alla conclusione che l'unico poliedro regolare della specie richiesta è in questo caso il dodecaedro regolare con diedri (ed angoli piani) retti e della sua effettiva esistenza ci accerteremo fra breve (n. 6).

« Concludiamo intanto: Nello spazio non-euclideo sono possibili soltanto due divisioni in poliedri regolari, e cioè quella in ottaedri e quella in dodecaedri con diedri retti. Nel primo caso i vertici del poliedro sono a distanza infinita e gli angoli piani sono nulli; nel secondo gli angoli piani sono retti.

« Queste due divisioni sono per la spazio non-euclideo le analoghe alla divisione in cubi dello spazio ordinario, l'unica quì possibile in poliedri regolari.

« 4. Ci proponiamo di studiare i gruppi discontinui di movimenti dello spazio non-euclideo che cangiano in sè medesime le divisioni in ottaedri e dodecaedri regolari sopra indicate. Ciascuno di questi movimenti sarà rappresentato, al modo di Poincarè (l. c.), da una sostituzione lineare sulla variabile complessa z:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

« Ai movimenti proprî, che riproducono le dette divisioni, associamo anche quelle riflessioni (Spiegelungen) che producono il medesimo effetto. La combinazione di una tale riflessione coi movimenti (1) dà un movimento *di 2ª specie*, nel quale ogni figura viene cangiata in una seconda inversamente congruente. L'espressione analitica dei movimenti di 2ª specie è

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \tag{2}$$

indicando z_0 la coniugata di z. Indicheremo con $\boldsymbol{\Gamma}$ il gruppo di sostituzioni di 1ª specie (1) che cangiano la divisione ottaedrica in sè medesima e con $\boldsymbol{\Gamma'}$ il gruppo analogo per la divisione dodecaedrica. Associandovi rispettivamente le sostituzioni di 2ª specie (2) collo stesso effetto, otterremo i gruppi ampliati che indicheremo con $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}, \overline{\boldsymbol{\Gamma'}}$, nei quali $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Gamma'}$ saranno contenuti quali sottogruppi eccezionali d'indice 2. Osserviamo poi che quelle sostituzioni di $\boldsymbol{\Gamma}$ o di $\boldsymbol{\Gamma'}$ che lasciano fisso un determinato ottaedro o dodecaedro della divisione formano un gruppo finito di 24 o di 60 sostituzioni e cioè l'ordinario gruppo dell'ottaedro (o cubo) nel 1° caso, del dodecaedro (o icosaedro) nel 2°.

« 5. Ciò premesso, consideriamo nella seconda delle rappresentazioni al

[1] Ciò segue subito del resto dalla seconda rappresentazione (conforme) ovvero anche dalla prima situando il vertice dell'angolo solido nel centro di figura.

n. 1ʻ l'ottaedro regolare a faccie sferiche e diedri retti inscritto nella sfera limite Σ ottenuto, come già si disse al n. 4, descrivendo coi centri nei vertici del cubo circoscritto a Σ otto sfere di raggio eguale a $\sqrt{2}$ [1]. Di questa figura facciamo un'inversione per raggi vettori reciproci collocando il centro d'inversione in un vertice dell'ottaedro. La sfera Σ si cangierà nel piano limite di Poincarè e il nostro ottaedro regolare sarà rappresentato da quella porzione di semi-spazio che è compresa nell'interno di un prisma indefinito a base quadrata, esternamente alle quattro sfere descritte sui lati della base quadrata come diametri (Vedi la fig. 1ª ove si osservano le traccie sul piano limite delle faccie del poliedro). Decomponiamo ciascuna faccia dell'ottaedro in 6 triangoli parziali conducendo le tre altezze e proiettando i 48 triangoli ottenuti dal centro dell'ottaedro decomporremo così il nostro solido in 48 piramidi triangolari, ciascuna delle quali è da riguardarsi come *poliedro fondamentale* del gruppo $\overline{\Gamma}$ [2].

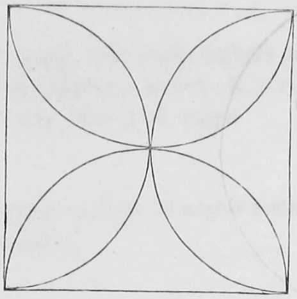

Fig. 1ª.

« Consideriamo nella figura rappresentativa una delle faccie piane e prendiamo per base della piramide fondamentale il triangolo tratteggiato indicato con T nella figura 2ª (triangolo fondamentale del gruppo modulare ampliato). Prendendo convenientemente sul piano limite gli assi coordinati $O\xi$, $O\eta$ ed assumendo per unità lineare il lato del quadrato la piramide immagine risulterà definita come la regione del semi-spazio $\zeta > 0$ interna al prisma triangolare indefinito limitato dai te piarni.

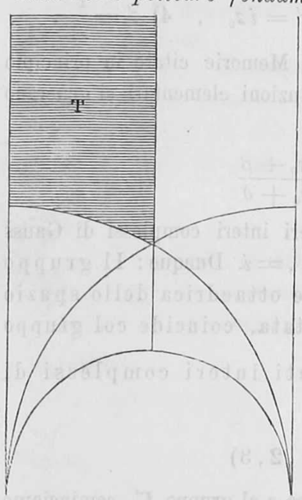

Fig. 2ª

$$1)\ \eta = 0 \quad 2)\ \xi = \frac{1}{2}\ , \quad 3)\ \xi - \eta = 0$$

[1] Il raggio della sfera limite Σ è supposto $= 1$.

[2] Ogni movimento di 1ª o 2ª specie in $\overline{\Gamma}$ cangia infatti questa piramide in una delle altre del medesimo ottaedro, ovvero in una piramide omologa in un altro ottaedro della divisione.

dal quale sia tolta la porzione interna alla sfera

$$4)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad \text{(fig. 3}^{\text{a}}\text{)}$$

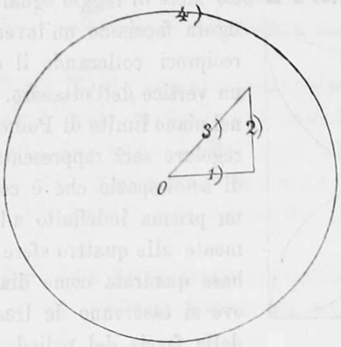

Fig. 3ª.

« Le riflessioni sulle quattro faccie di questa piramide sono le sostituzioni elementari del gruppo Γ; esse hanno le rispettive espressioni analitiche

$$1)\ z' = z_0 \ , \quad 2)\ z' = -z_0 + i \ , \quad 3)\ z' = i z_0 \ , \quad 4)\ z' = \frac{1}{z_0}$$

« Come ho dimostrato in una delle mie Memorie citate in principio (Math. Ann. Bd. 40 p. 361), con queste sostituzioni elementari si generano tutte le sostituzioni di 1ª e di 2ª specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

che hanno per coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dei numeri interi complessi di Gauss e per determinante una delle quattro unità $\pm 1, \pm i$. Dunque: Il gruppo Γ che riproduce la divisione regolare ottaedrica dello spazio non-euclideo, convenientemente orientata, coincide col gruppo delle sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ a coefficienti interi complessi di Gauss e a determinante.

$$\alpha\delta - \beta\gamma = i^r \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

« 6. Venendo ora alla divisione dodecaedrica e al gruppo Γ', cominciamo dal costruire effettivamente, nella seconda delle rappresentazioni al n. 1, il dodecaedro a faccie sferiche immagine del dodecaedro regolare a diedri retti dello spazio non-euclideo.

« Prendiamo nello spazio rappresentativo un icosaedro regolare di spigolo $= l$, pel quale adunque il raggio R dalla sfera circoscritta sarà dato da

$$R = \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{5 + \sqrt{5}} \ ,$$

e descriviamo coi centri nei vertici dell'icosaedro 12 sfere $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{12}$ di raggio

$$r = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

ciascuna delle quali taglierà ortogonalmente le cinque circostanti. Il centro 0 dell'icosaedro, essendo $R > r$, è esterno alle sfere σ e descrivendo col centro 0 una sfera Σ di raggio

$$\varrho = \sqrt{R^2 - r^2},$$

questa taglierà ad angolo retto le 12 sfere σ. Facciamo $\varrho = 1$, pel che basta prendere

$$l = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}, \quad R = \sqrt[4]{5}$$

e prendiamo la sfera Σ come sfera limite della nostra seconda rappresentazione. Il dodecaedro regolare a faccie sferiche racchiuso, entro Σ, dalle 12 sfere σ rappresenterà il dodecaedro regolare a diedri (ed angoli piani) retti dello spazio non-euclideo.

« Per trovare le sostituzioni elementari dei gruppi $\overline{\Gamma}, \Gamma$ situiamo attorno alla sfera *complessa* Σ (¹) l'icosaedro nella posizione normale adottata nel libro di Klein (²), cioè in guisa che uno dei 6 diametri dell'icosaedro coincida coll'asse 0ζ e uno dei vertici contigui al vertice

$$\zeta = -\sqrt[4]{5}$$

si disponga sul piano $\xi\zeta$ della parte delle ξ positive. Con tale orientazione il gruppo delle 60 rotazioni dell'icosaedro in sè medesimo si genera colle due sostituzioni elementari:

$$\text{S)} \quad z' = \frac{\varepsilon^3 z}{\varepsilon^2} \quad , \qquad \text{T)} \quad z' = \frac{(\varepsilon^4 - \varepsilon) z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

ove

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}.$$

« Combinando colle due sostituzioni S, T di 1ª specie la riflessione

$$z' = z_0$$

(¹) Si vede subito che la sfera Σ è tutta interna all'icosaedro poichè il raggio

$$r' = \frac{l\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$$

della sfera inscritta nell'icosaedro riesce > 1.

(²) *Vorlesungen über das Ikosaeder*, p. 39 sgg.

si generano poi le 120 sostituzioni di 1ª e 2ª specie del gruppo ampliato dell'icosaedro. Queste sono altresì le operazioni che riportano in sè medesimo il dodecaedro regolare costruito e per ottenere le sostituzioni elementari di $\bar{\Gamma}'$ basterà semplicemente associarvi la riflessione sopra una delle 12 sfere σ. Scegliamo fra le sfere σ quella che ha il centro nel vertice $\zeta = \sqrt[4]{5}$, ed osservando che il piano radicale di una sfera σ colla sfera limite Σ dista dal centro della lunghezza

$$p = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}},$$

troveremo per l'espressione analitica di questa riflessione:

$$z' = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)z_0}.$$

« Ne segue: Il gruppo Γ' di movimenti dello spazio non-euclideo, che riporta in sè medesima la divisione regolare dodecaedrica, convenientemente orientata, si genera colle tre sostituzioni elementari.

$$\text{S)}\ z' = \frac{\varepsilon^3 z}{\varepsilon^2},\ \text{T)}\ z' = \frac{(\varepsilon^4-\varepsilon)\,z+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,z+(\varepsilon-\varepsilon^4)},\ \text{V)}\ z' = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)z}.$$

« Rispetto alla costituzione aritmetica di questo gruppo Γ', osserveremo qui soltanto che le sue sostituzioni hanno tutte la forma

$$(3)\qquad z' = \frac{\left(a\sqrt[4]{5}+b\right)z+\left(c\sqrt[4]{5}+d\right)}{\left(c_0\sqrt[4]{5}-d_0\right)z+\left(-a_0\sqrt[4]{5}+b_0\right)},$$

dove a, b, c, d sono numeri interi algebrici nel campo della radice quinta ε dell'unità e a_0, b_0, c_0, d_0 indicano i loro coniugati. Invero le tre sostituzioni elementari S, T, V hanno evidentemente questa forma; d'altronde due sostituzioni qualunque della forma (3) si compongono nuovamente in una sostituzione di questa, poichè dalla formola

$$\sqrt{5} = 2\,(\varepsilon+\varepsilon^4)+1$$

segue che $\sqrt[4]{5}$ è, nell'anzidetto campo di numeri, un'irrazionalità quadratica ».