ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXC.

1893

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME II.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1893

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 20 agosto 1893.

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia.* Nota I. di A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« Io ho incontrata questa superficie studiando alcune varietà (1) della superficie del 5° ordine a cubica doppia e punto triplo, che fu già oggetto di varie mie Note precedenti (2). Di essa detti già le formule per una rappresentazione parametrica; ed ora mi propongo di farne uno studio più approfondito.

§ I.

« 1. La superficie è rappresentata parametricamente dalle formule (3):

$$x_1 = \frac{\xi_1}{C_{11} - \chi_1 \tau^3}, \quad x_2 = \frac{\xi_2}{C_{22} - \chi_2 \tau^3}, \quad x_3 = \frac{\xi_3}{C_{33} - \chi_3 \tau^3}, \quad x_4 = \frac{\xi_4}{C_{44} - \chi_4 \tau^3} \qquad (1)$$

ove le C_{ii} $(i = 1, \ldots, 4)$ sono forme binarie cubiche nei parametri omogenei

(1) *Sopra alcune varietà della superficie del 5° ordine* ecc. Rend. Acc. Lincei, dicembre 1892.

(2) *Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo.* Ibid. Settembre 1892. — *Ancora della superficie del 5° ordine* ecc. Ibid., ottobre 1892. — *Altre proprietà* ecc Ibid., novembre 1892.

(3) Nota citata in (1) n. 8.

λ, μ derivate da una stessa forma binaria biquadratica Ω per derivazione rispetto ai suoi fattori lineari; sicchè, posto che sia

$$c_{ii} = \lambda f_i + \mu \varphi_i \, (i = 1, \dots, 4) \; \Omega \equiv c_{11} \, c_{22} \, c_{33} \, c_{44}$$

si abbia:

$$C_{ii} = \frac{\partial \Omega}{\partial c_{ii}} \, (i = 1, \dots, 4);$$

τ è poi un terzo parametro variabile, $\xi_1, \dots, \xi_4$ sono le coordinate di un punto fisso, e $\chi_1, \dots, \chi_4$ grandezze arbitrarie.

« Io sono giunto alle (1) definendo la superficie come polare congiunta del polo ξ_i rispetto al fascio delle quadriche

$$c_{x^2} = \lambda f_{x^2} + \mu \varphi_{x^2} = 0 \tag{2}$$

ed alla quadrica isolata

$$\sum_1^4 \frac{x_i^2}{\chi_i} = 0; \tag{3}$$

perciò il punto ξ_i è triplo per la superficie; e sono sue rette le sei costole del tetraedro di riferimento, le rette che ne proiettano i vertici da ξ_i, e la polare, rispetto a (3), della coniugata di ξ_i rispetto a (2), cioè la retta dei punti:

$$\chi_i f_i \xi_i \quad , \quad \chi_i \varphi_i \xi_i \qquad (i = 1, \dots, 4). \tag{4}$$

« 2. L'esistenza di queste rette è data dalle proprietà della superficie generale del tipo, stabilite nelle Note citate; ma essa, può, del resto, per le prime 10, essere verificata, senza difficoltà, sulle equazioni (1). Usiamo, nel fatto, di coordinate cartesiane; avremo che le (1) potranno essere sostituite dalle seguenti:

$$x = \frac{C_{44} - \chi_4}{C_{11} - \chi_1} \xi \,, \quad y = \frac{C_{44} - \chi_4}{C_{22} - \chi_2} \eta \,, \quad z = \frac{C_{44} - \chi_4}{C_{33} - \chi_3} \zeta \tag{5}$$

« Ora, ponendo

$$F_4 = -(f\varphi)_{14} (f\varphi)_{24} (f\varphi)_{34}$$

se nelle (5) si fa $\mu = -\lambda \dfrac{f_4}{\varphi_4}$, si avrà:

$$x = \frac{F_4 . \lambda^3 + \chi_4 \varphi_4^3}{\chi_1 \varphi_4^3} \xi \,, \quad y = \frac{F_4 . \lambda^3 + \chi_4 \varphi_4^3}{\chi_2 \varphi_4^3} \eta \,, \quad z = \frac{F_4 . \lambda^3 + \chi_4 \varphi_4^3}{\chi_3 \varphi_4^3} \zeta$$

che rappresentano una retta per l'origine, poichè per $\lambda^3 = \dfrac{F_4}{\chi_4 f_4}$ si ha $x = y = z = 0$, e pel punto $\left(\dfrac{\chi_4}{\chi_1} \xi \,, \dfrac{\chi_4}{\chi_2} \eta \,, \dfrac{\chi_4}{\chi_3} \zeta \right) \dots \alpha)$.

« Facciamo ora che simultaneamente si abbia

$$C_{44} - \chi_4 = 0 \,, \qquad C_{11} - \chi_1 = 0 \qquad C_{ii} - \chi_i \gtrless 0 \; (i = 2, 3)$$

allora si avrà: $x = \frac{0}{0} =$ qual., $y = 0$, $z = 0$; epperò se ne conclude che l'asse delle x è una retta della superficie. In modo analogo, cioè ponendo successivamente

$$C_{44} - \chi_4 = 0\,, \quad C_{22} - \chi_2 = 0 \quad C_{ii} - \chi_i \neq 0\ (i = 1, 3)$$

$$C_{44} - \chi_4 = 0\,, \quad C_{33} - \chi_3 = 0 \quad C_{ii} - \chi_i \neq 0\ (i = 1, 2)$$

si vede che sono rette della superficie l'asse y e quello delle z.

« Poniamo ancora $c_{11} = 0$, ed

$$F_1 = -(f\varphi)_{14}(f\varphi)_{12}(f\varphi)_{31}$$

avremo:

$$x = \frac{\chi_4 \varphi_1{}^3}{F_1 \lambda^3 + \chi_1 \varphi_1{}^3}\,\xi\,, \qquad y = \frac{\chi_4}{\chi_2}\,\eta\,, \quad z = \frac{\chi_4}{\chi_3}\,\zeta$$

e queste rappresentano la parallela tracciata pel punto α), cioè dal polo della superficie, all'asse delle x. In modo analogo, col porre successivamente $c_{22} = 0$, $c_{33} = 0$ si vede che sono rette della superficie le parallele da α) ad y e z.

« In fine, considerando le soluzioni comuni alle

$$C_{22} - \chi_2 = 0 \qquad C_{33} - \chi_3 = 0 \qquad C_{ii} - \chi_i \neq 0\ (i = 1, 4)$$

si ha $y = \infty$, $z = \infty$; epperò la retta all'infinito del piano yz è sulla superficie. Similmente si vede che sono sulla superficie le rette all' infinito dei piani zx, xy.

« 3. Riprendiamo a considerare la superficie quale è data dalle formule (1), e scriviamo le equazioni della sua curva doppia. Oltre ai due modi da tenere, già dati nella Nota « *Ancora della superficie del 5° ordine* ecc. », l. c., § I, n. 2, nel caso attuale ne interviene un altro che è interessante anche per le cose che diremo in seguito. — In fatti, dalle (1) si ha che le equazioni del cono cubico (razionale) tangente al punto ξ_i, sono:

$$\left.\begin{array}{c} x'_1 \equiv (C_{11} - \chi_1 \tau^3)\,\xi_1\,,\ x'_2 \equiv (C_{22} - \chi_2 \tau^3)\,\xi_2\,,\ x'_3 \equiv (C_{33} - \chi_3 \tau^8)\,\xi_3\,, \\ x'_4 \equiv (C_{44} - \chi_4 \tau^3)\,\xi_4 \end{array}\right\} \quad (1')$$

e perciò, se si considerano come corrispondenti, sul cono cubico e sulla superficie, quei due punti dati dalle (1) ed (1′) corrispondentemente ad uno stesso sistema di valori delle λ, μ, τ, fra tutte le coppie di punti corrispondenti avrà luogo la trasformazione cremoniana cubica

$$x_i\, x'_i \equiv \xi_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, 4). \qquad (6)$$

La cubica doppia della superficie sarà quindi la trasformata della retta doppia del cono cubico per mezzo della (6). Ora se noi poniamo:

$$\xi_i' = \left(f\xi\, \varphi\xi\, \frac{\xi}{\chi}\right)_i \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

la retta doppia del cono cubico sarà la retta dei piani

$$f_{\xi' x} = 0\,, \qquad \varphi_{\xi' x} = 0 \qquad (7)$$

perciò, indicando con $a_y = 0$, $b_y = 0$ due piani arbitrarii, non condotti per la (7), un punto di questa retta, variabile col parametro $\lambda : \mu$, è dato da

$$y_i \equiv \lambda \, (f\xi' \, \varphi\xi' \, a)_i + \mu \, (f\xi' \, \varphi\xi' \, b)_i \qquad (i = 1, \dots, 4).$$

Il punto corrispondente sulla cubica doppia della superficie sarà quindi dato da

$$x_i \equiv \frac{\xi_i^2}{\lambda \, (f\xi' \, \varphi\xi' \, a)_i + \mu \, (f\xi' \, \varphi\xi' \, b)_i} \qquad (i = 1, \dots 4) \qquad (8)$$

e sono perciò queste le richieste formule.

§ II.

« 4. Se indichiamo con $A_1, \dots, A_4$ i vertici del tetraedro di riferimento, e con A_5 il punto ξ_i, potremo indicare con i simboli $(ik) \equiv (ki) \equiv A_i A_k$ le prime 10 rette della superficie: l'undecima allora l'indicheremo con b. Tagliando con un piano arbitrario η, avremo su questo 10 punti (ik), così distribuiti che, in cinque maniere diverse, essi sono i vertici di un quadrilatero completo e quelli di un quadrangolo completo circoscritto al quadrilatero; e poi un punto B non allineato con nessuna coppia di punti (ik). Però, indicando con **1**, **2**, **3** i punti η.(8), abbiamo che sono sopra una stessa conica:

$$\left.\begin{array}{lllll} 1^{\circ}.\ \text{i punti} & (12) & (13) & (14) & (15) \\ 2^{\circ}.\quad\ » & (21) & (23) & (24) & (25) \\ 3^{\circ}.\quad\ » & (31) & (32) & (34) & (35) \\ 4^{\circ}\quad\ » & (41) & (42) & (43) & (45) \\ 5^{\circ}.\quad\ » & (51) & (52) & (53) & (54) \end{array}\right\} \text{ ed } \mathbf{1}\ \mathbf{2}\ \mathbf{3};$$

facendo perciò seguire la proiezione sghemba, sul piano μ, mediante corde della cubica (8), da una trasformazione quadratica arbitraria, coi punti fondamentali **1**, **2**, **3**, il sistema dei punti (ik) si viene a mutare in un altro che indicheremo ancora coi medesimi simboli e che soddisfa alla proprietà che

$$(ik),\ (il),\ (im),\ (in)$$

sono in linea retta; e questa retta la diremo i $(i, k, l, m, n = 1, \dots, 5)$. Il sistema lineare rappresentativo della superficie ha, dunque, per punti fondamentali i 10 vertici del pentalatero 1, 2, 3, 4, 5 ed il punto B. Se ne deduce che la superficie ha 5 punti tripli nei punti $A_1, A_2, \dots, A_5$ (1) ed 11 sistemi di cubiche sghembe, così distribiti che ne passano 6 sistemi per ogni punto triplo, 1 per ogni tre ed 1 per tutti e cinque i punti tripli.

« Quest'undecimo sistema è composto di cubiche appoggiate tutte alla retta b.

(1) Nella Nota: « *Sulla superficie del 5° ordine con cubica doppia e 2, 3 punti tripli* » inserita negli Atti della R. Accademia delle scienze di Modena, vol. IX, serie 2ª, io ho fatto un ragionamento dal quale risulta in altro modo (cfr. n. 1), che, oltre al punto triplo A_5, la superficie ha per punti tripli anche $A_1 \dots, A_4$.

« 5. Siccome 6 punti individuano una cubica, quest'ultima proprietà ci dice che la superficie si può immaginare generata dalle cubiche condotte per 5 punti fissi e per un punto variabile di una retta fissa; epperò si può enunciare il seguente risultato che mette in evidenza la *simmetria* della superficie rispetto al pentagono dei suoi punti tripli, cioè:

« La superficie del 5° ordine, che stiamo studiando, è la superficie luogo delle cubiche condotte pei vertici di un pentagono gobbo ed appoggiate ad una retta fissa: la sua curva doppia è allora quella fra tali cubiche che ha la retta fissa per corda.

« Utilizziamo questo risultato. Osserviamo dapprima che, dicendo (b) il sistema delle cubiche di cui ora si è discorso, le cubiche di (b) si possono, due a due, distribuire, in 5 maniere diverse, in guisa che esse siano su uno stesso cono quadrico col vertice in un punto triplo. In fatti, dicendo $\varphi_1{}^3$ una di tali cubiche e φ il cono quadrico che la proietta da A_i, questo cono avrà comune colla superficie la curva

$$(ik)+(il)+(im)+(in)+\varphi_1{}^3+\varphi_2{}^y=\gamma^{10};$$

epperò, dovendo essere $4+3+y=10$, sarà $y=3$, cioè $\varphi_2{}^y=\varphi_2{}^3$. Ma b aveva con φ a comune il punto d'appoggio della $\varphi_1{}^3$, dunque a b si appoggerà anche $\varphi_2{}^3$; ma $\varphi_2{}^3$ passa per tutti i punti tripli, perchè per ciascuno di questi γ^{10} deve passare con 3 rami, due dei quali sono quelli di una (ih) $(h\equiv k, l, m)$ e quello della $\varphi_1{}^3$; quindi, se ne conclude, che $\varphi_2{}^3$ è pure una cubica del sistema (b).

« Ora, considerando il fascio delle quadriche che ha per base $(8)+b$, una qualunque di queste quadriche taglia la superficie ulteriormente in una cubica sghemba di (b); e questa, proiettata da A_i, dà un cono quadrico. Viceversa, dato uno di questi coni quadrici, siccome esso taglia la superficie secondo due curve di (b), per mezzo della costruzione precedente gli vengono a corrispondere due quadriche del fascio $(8)+b$. La corrispondenza fra i coni del fascio $A_i(A_k, A_l, A_m, A_n)$ e le quadriche del fascio $(8)+b$ che così viene a porsi, per mezzo della superficie, è dunque una $(1, 2)$; e noi abbiamo quindi, facendo che B_i prenda la posizione di tutti i 5 punti tripli, il seguente risultato:

« La superficie può essere ottenuta in 5 modi diversi per mezzo di un fascio di quadriche con base decomposta ed un fascio di coni quadrici in corrispondenza $(1, 2)$.

« 6. Prima di trar profitto da quest'ultimo risultato, torniamo alla rappresentazione piana. Quanto si è detto al principio del numero precedente intorno alla distribuzione, due a due, delle cubiche del sistema (b) ci mette in grado di poter dire che le immagini di tali cubiche costituiscono in 5 modi diversi una involuzione, e che tutte le 5 involuzioni così ottenute sono armoniche ad una stessa $\mathfrak{J}$, della quale i raggi doppi e, f costituiscono, insieme ai lati del pentalatero 12...5, l'immagine della cubica doppia [1].

« I punti di e, f, due a due, l'uno su e, l'altro su f, rappresentano uno stesso punto della cubica (8), e si corrispondono su queste due rette proiettivamente. In fatti, poichè una retta qualunque del piano rappresenta una quartica razionale della superficie, epperò la quartica ulteriore sezione di questa con una quadrica arbitraria condotta per la (8), la quartica immagine della congiungente i punti immagini di uno stesso punto della (8) avrà in questo un punto doppio, e sarà quindi l'ulteriore sezione della superficie col cono quadrico proiettante da quel punto la cubica (8). Ora nel sistema dei coni quadrici che dai diversi punti di (8) proiettano la (8), ve ne sono due che passano per un punto arbitrario dello spazio, ed in particolare per un punto della superficie; sul piano rappresentativo passeranno dunque due rette ciascuna delle quali congiunge i punti immagini di uno stesso punto della (8); vale a dire che l'inviluppo di queste rette è una conica Δ, tangente ad e, f: questa conica è, evidentemente, tangente ai 5 lati del pentalatero 12...5; e, quindi, il problema della costruzione dell'immagine della cubica doppia si riduce a quello, quadratico, di condurre per B le tangenti a Δ.

« 7. È importante di osservare che, posto $b.(8) \equiv$ E, F, il cono proiettante da E, o da F, la (8) riesce tangente, lungo la (8), alla superficie. La sezione ulteriore di questa con quel cono si compone, in fatti, della b e di una cubica che passando per E, o per F, ed essendo circoscritta al pentagono dei punti tripli, coincide con la (8). Noi, dunque, possiamo intanto dire che lungo la cubica doppia le due falde della superficie si comportano come quelle di due coni quadratici, dotati di una generatrice comune, lungo la cubica loro ulteriore sezione; o, in altri termini, ciò che fa lo stesso: l'inviluppo dei piani tangenti lungo la cubica doppia è l'insieme dei due coni quadrici: E.(8) $\equiv$ (E), F.(8) $\equiv$ (F); e di questi due coni l'uno è toccato dall'uno, l'altro dall'altro dei piani tangenti in uno stesso punto. Si capisce che, in questo enunciato si escludono i piani tangenti nei 5 punti tripli, i quali, in qualche modo, potrebbero anche dirsi tangenti lungo la curva doppia. Del resto, fra questi piani appartengono agli inviluppi (E), (F) quelli tangenti lungo le generatrici doppie dei coni cubici corrispondenti.

« Un punto della conica Δ essendo l'intersezione di due tangenti infinitamente vicine, le quartiche della superficie, con un punto doppio sulla (8),

[1] In generale, si ha che la cubica doppia di una superficie del 5° ordine, che ne possiede, ha per immagine, sul piano rappresentativo, una curva del 7° ordine (cfr. Clebsch. Math. Annalen, t. III).

avranno un inviluppo, e questo sarà dell' 8° ordine perchè Δ è tagliata dalla immagine di una sezione piana arbitraria in 8 punti. Quest' inviluppo lo diremo Δ'; e poichè Δ è toccata da e, f nei punti che insieme a B dànno le immagini dei punti E, F, Δ' è tangente alla cubica doppia nei punti E, F. Poichè, inoltre, e, f hanno ciascuna a comune un punto con 1, ..., 5, Δ' passa per tutti e 5 i punti tripli; e ne concludiamo questo risultato che contribuisce a dare una nozione più chiara della superficie, cioè: Sulla superficie le quartiche sghembe, dotate di un punto doppio sulla cubica doppia, hanno per inviluppo una curva dell' 8° ordine, circoscritta al pentagono dei punti tripli, ed appoggiata alla cubica doppia nei punti E, F; il passaggio pei punti tripli, e questo appoggio, seguendo col toccare la (8).

« Cerchiamo ora le coniche e le cubiche, piane o sghembe, isolate che la superficie possiede. Evidentemente le coniche sono quelle che corrispondono alle rette

$$(ik) \,.\, (mn)$$

dove ik, mn sono due combinazioni binarie dei numeri 1,2, ..., 5 non dotate di elemento comune, e quelle che corrispondono alle rette

$$\mathrm{B} \,.\, (ik).$$

« Le prime sono in numero di $15 = \dfrac{5.4.3.2}{8}$, e le seconde in numero di 10; abbiamo dunque che sulla superficie vi sono 25 coniche, 10 delle quali nelle facce del pentagono dei punti tripli, ed appoggiate alla retta b; delle 15 rimanenti ne passano sei per ogni punto triplo, e quelle che passano per A_i si appoggiano una ad una alle sei rette (kl) $(i, k, l = 1, \ldots, 5)$.

« Si può aggiungere che fra le coniche della 1ª specie, due qualunque non hanno all' infuori dei punti tripli, punti comuni, mentre che fra le coniche della 2ª specie una qualunque ne incontra otto della prima e due della propria specie. Vi sono poi, nella 2ª specie, 12 coniche incontrate da una della prima.

« Accanto alle 15 coniche della seconda specie abbiamo 15 cubiche piane: queste completano la sezione dei piani di quelle coniche colla superficie. Esse hanno per immagini le coniche condotte per B e circoscritte ai quadrilateri semplici contenuti nel pentalatero 12...5; si appoggiano perciò ciascuna ai quattro lati di un determinato quadrangolo formato coi vertici del pentagono dei punti tripli, ed hanno, tre a tre, in ciascuno di questi punti tripli, un punto doppio.

« 8. Finalmente, considerando il pentagono 1, 2, ..., 5 troviamo che esso può in 12 modi diversi essere considerato come pentagono semplice; e corrispondentemente si hanno sul piano rappresentativo 12 pentilateri semplici. A ciascuno di questi è circoscrittibile una conica, alla quale corrisponde sulla superficie una cubica che non incontra la retta b, ma che incontra 5 delle rette (ik). Noi, dunque possiamo, dire che all'infuori dei sistemi già descritti di cubiche sghembe la superficie ne possiede altre 12, ciascuna delle quali è appoggiata ai 5 lati di un determinato pentagono semplice formato col pentagono dei punti tripli. Ognuno di queste cubiche è poi appoggiata in 4 punti alla cubica doppia ed alla curva $\varDelta'$.

« Per una nozione più chiara della forma della superficie, oltre alle nozioni precedenti, giova l'osservare che la superficie stessa è a falde reali, o non, lungo la curva doppia secondochè B è esterno o interno a $\varDelta$, cioè secondochè b è una corda appoggiata in punti reali o in punti immaginarii alla (8).

§ III.

« 9. Considerando il fascio di quadriche che ha per base la $(8)+(ik)$, e ragionando come nel n. 5 della mia Nota: « *Altre proprietà della sup.* ecc. », l. c., noi troviamo che la superficie si presenta come luogo delle intersezioni degli elementi corrispondenti delle quadriche di quel fascio e dei coni cubici (razionali) di un sistema di indice 2 in corrispondenza univoca, coni dotati di 4 generatrici comuni, le (ik), (il), (im), (in) e di comune vertice A_i. Di fasci quali quelli di base $(8)+(ik)$ ve ne sono 10, e per ognuno di essi si hanno due sistemi di coni cubici, uno col vertice in i e l'altro col vertice in k; noi dunque possiamo dare quest'altro enunciato che fornisce altri modi di costruzione della superficie:

« La superficie del 5° ordine con 5 punti tripli, ed una cubica doppia, si può, in 20 maniere diverse ottenere, come luogo delle intesezioni degli elementi corrispondenti di un fascio di quadriche con base decomposta ed un sistema, d'indice 2, di coni cubici razionali in corrispondenza univoca. Questi modi sono coordinati, due a due, alle 10 rette della superficie uscenti dai punti tripli.

« 10. Procedendo ora come al n. 6 della mia Nota citata si ha che, corrispondentemente ai precedenti modi di generazione, la superficie si presenta in 20 maniere diverse come caso specializzato delle superficie del 7° ordine a quartica doppia contenute nel tipo.

$$f_1^2\,\varphi_1 - f_1\,f_2\,\varphi_2 + f_2^2\,\varphi_3 = 0 \tag{9}$$

ove f_1, f_2 sono forme quadratiche nelle coordinate $x_1, \ldots, x_4$ di un punto, e φ_1, φ_2, φ_3 sono funzioni cubiche omogenee delle quantità:

$$\mathfrak{J}_1 = (\beta\gamma\xi x)\,,\quad \mathfrak{J}_2 = (\gamma\alpha\xi x)\,,\quad \mathfrak{J}_3 = (\alpha\beta\xi x) \tag{10}$$

ed ove α_i, β_i, γ_i, ξ_i sono le coordinate dei vertici di un tetraedro arbitrario. Senonchè, oltre alle condizioni in quella Nota enunciate, per la scelta delle f e delle φ, ne occorre ora una nuova per le φ, ed è che i coni cubici

$$\varphi_1 = 0\,,\quad \varphi_2 = 0\,,\quad \varphi_3 = 0$$

abbiamo 4 generatrici comuni. Come allora, per virtù di tutte queste condizioni, dalla (9) si viene a staccare un fattore lineare contato due volte, sicchè nell'equazione restante si ha quella di una superficie come vogliano; e come inoltre, per virtù delle (10) scritte nella forma:

$$\mathfrak{J}_1 = \Sigma\,(\beta\gamma)_{ik}\,p_{lm}\,,\quad \mathfrak{J}_2 = \Sigma\,(\gamma\alpha)_{ik}\,p_{lm}\,,\quad \mathfrak{J}_3 = \Sigma\,(\alpha\beta)_{ik}\,p_{lm}$$

e delle sostituzioni $x_i \equiv u_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ l'equazione (9) diventa quella di un connesso piano-retta (3, 4), così, avendo ciò luogo in 20 modi diversi, noi possiamo dire che:

« La superficie del 5° ordine, con 5 punti tripli e cubica doppia, può, in 20 modi diversi, essere ottenuta quale superficie polare congiunta rispetto ad un connesso piano-retta (3, 4) e ad una quadrica. In ognuno di questi modi di produzione la superficie si trova accompagnata da un piano, contato due volte.

« 11. L'ultimo teorema del n. 5 ci dà un analogo ed importante risultato. Per esso teorema la superficie si presenta come caso di degenerazione della superficie generata dai sistemi:

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0 \qquad \sqrt{\lambda}\,.\,f_1 \pm \sqrt{\mu}\,.\,f_2 = 0$$

cioè della superficie

$$\varphi_2 f_1^2 + \varphi_1 f_2^2 = 0 \tag{12}$$

ove φ_1, φ_2 sono funzioni quadratiche della $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ ed f_1, f_2 funzioni quadratiche arbitrarie delle coordinate $x_1, \ldots, x_4$ di un punto. Perchè la (12) sia una superficie quale noi la vogliamo, la quartica $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ si deve decomporre in una cubica φ^3 ed in una sua corda b; ξ_i non deve essere su b ma su φ^3. Allora, detti, p. e., h_i, h'_i i punti $b.\varphi^3$, dalla (12) si stacca il fattore $(\xi h h' x)$ e l'equazione rimanente sarà quella di una superficie come vogliamo. Se in (12) si fanno le sostituzioni (11) e le $x_i \equiv u_i\,(i = 1, \ldots, 4)$ noi avremo questo risultato:

« Vi sono 5 enti connessi (4, 2), rispetto a ciascuno dei quali, e rispetto ad una quadrica, la superficie è polare congiunta di un suo punto triplo. Anche in questo modo di generazione la superficie viene accompagnata da un piano, ma semplice ».

Fisica. — *Sulle equazioni della rifrazione della luce.* Nota di Stefano Pagliani, presentata dal Socio Cannizzaro.

« In una Nota precedente (1) ho dimostrato che per il potere induttore specifico, o costante di dielettricità dei composti liquidi si possono avere le due relazioni:

$$\frac{D-1}{D}\,\frac{N}{U} = \text{cost.} \quad \text{e} \quad \frac{D-1}{D}\sqrt{\frac{N}{M}} = \text{cost.},$$

(1) V. pag. 48.