ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.* Nota II di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [1].

Per gli integrali in forma non parametrica

$$I_c = \int_c f(x, y, y')\, dx, \tag{1}$$

relativi cioè alle curve date da un'equazione $y = y(x)$, il Lindeberg ha dimostrato la proposizione analoga a quella da lui stesso stabilita per gli integrali in forma parametrica e da noi riportata nella Nota I [2] limitandola a quelle curve per le quali la funzione $y(x)$ corrispondente ha la derivata prima sempre, in modulo, inferiore ad uno stesso numero; con altre parole, ha provato che:

« Se C_0 è una curva la cui funzione corrispondente $y_0(x)$ è continua insieme con le sue due prime derivate, e se su di essa valgono le condizioni di Legendre e di Weierstrass, prese in senso stretto, scelti comunque due numeri positivi, ε e ε', si può determinarne un altro ϱ in modo che sia sempre $I_c - I_{c_0} > 0$, per ogni altra curva ordinaria [3] C, avente gli stessi estremi della C_0, soddisfacente ovunque alla disuguaglianza $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$ e tale che la lunghezza complessiva degli intervalli dell'asse x, sui quali è sempre $|y'(x) - y_0'(x)| > \varepsilon'$, risulti maggiore di ε ».

Volendo conferire a questo enunciato tutta la generalità che ha la proposizione corrispondente del Lindeberg, relativa agli integrali in forma parametrica, è necessario di liberare l'enunciato stesso dalla condizione relativa alla limitazione del modulo della derivata $y'(x)$. Questo scopo fu raggiunto dal compianto prof. E. E. Levi, il quale superò la grave difficoltà che qui si presentava per mezzo del seguente teorema:

« Se, in un campo finito e chiuso T di valori (x, y, y'), sono soddisfatte le condizioni $f_{y'y'}(x\, y\, y') > 0$, $E(x, y; y', \bar{y}') > 0$, per ogni $\bar{y}' \neq y'$ [E essendo la funzione di Weierstrass relativa all'integrale (1)]; e se T_1 è un campo chiuso, contenuto in T, per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ paral-

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] Questi Rendiconti, pag. 19.

[3] Composta cioè di un numero finito di archi per ciascuno dei quali la $y(x)$ abbia la derivata prima finita e continua.

lelo all'asse y' e totalmente contenuto in T, allora si possono determinare due numeri positivi σ e μ per modo che, se $|y' - \bar{y}'| > \sigma$ e (x, y, y') è in T_1, si abbia

$$E(x, y; y', \bar{y}') > \mu |y' - \bar{y}'| \text{ ».} \tag{2}$$

Dopo ciò, e ammesso che sulla curva C_0 valga la condizione di Legendre in senso stretto e che la condizione di Weierstrass sia verificata in modo da aversi, per ogni x dell'intervallo su cui è definita la $y_0(x)$, ed ogni coppia y, y' soddisfacente alle $|y - y_0(x)| < r$, $|y' - y_0'(x)| < r$ (r essendo un numero positivo, comunque piccolo) e qualunque sia $\bar{y}' \neq y'$, $E(x, y; y', \bar{y}') > 0$, la proposizione del Lindeberg, secondo quanto ha mostrato il Levi, vale indipendentemente dalla restrizione dianzi accennata.

Per estendere il teorema, così ottenuto, conformemente a quanto si è fatto nella Nota I, occorre una preliminare estensione del teorema del Levi sopra riportato. A questo intento, ho cominciato col liberare completamente il teorema del Levi dalla condizione $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$, e ne ho poi ottenuta questa generalizzazione:

« Se T è un campo limitato e chiuso di punti (x, y, y'), ed esiste un numero positivo δ tale che, per ogni (x, y, y') di T e ogni $\bar{y}'$ soddisfacente alla $|y' - \bar{y}'| \leq \delta$, sia $E(x, y; \bar{y}', \tilde{y}') > 0$ per qualunque $\tilde{y}' \neq \bar{y}'$, scelto ad arbitrio un numero $\sigma > 0$, se ne possono determinare altri due ν e μ, pure > 0, in modo che, per ogni numero q tale che sia $|q - f(x, y, y')| \leq \nu$, si abbia

$$f(x\, y\, \tilde{y}') - f(x, y, y') - q(\tilde{y}' - y') > \mu |\tilde{y}' - y'| \text{ [1]},$$

per tutti i punti $(x\, y\, y')$ di T e tutti gli $\tilde{y}'$ soddisfacenti alla $|y' - \tilde{y}'| \geq \sigma$ ».

Servendomi di questa generalizzazione del teorema del Levi, sono riuscito a dimostrare le due proposizioni che seguono, le quali forniscono due successive estensioni del teorema del Lindeberg:

1°) « Se C_0 è una curva di equazione $y = y_0(x)$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$, con $y_0(x)$ funzione assolutamente continua e:

a) per ogni punto $\bar{x}$ di (a_0, b_0) in cui esiste finita la $y_0'(x)$ si può determinare un numero positivo $\varrho(\bar{x})$ tale che, per tutte le terne (x, y, y') soddisfacenti alle $|x - \bar{x}| \leq \varrho(\bar{x})$, $|y - y_0(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x})$, $|y' - y_0'(\bar{x})| \leq \varrho(\bar{x})$, e per qualsiasi $\tilde{y}' \neq y'$, sia $E(x, y; y', \tilde{y}') > 0$;

b) per ogni altro punto $\bar{\bar{x}}$ di (a_0, b_0) dove la $y_0'(x)$ non esiste o è infinita, si hanno due numeri $\bar{y}'(\bar{\bar{x}})$, $\varrho(\bar{\bar{x}})$, il secondo dei quali positivo, in modo che soddisfatte le $|x - \bar{\bar{x}}| \leq \varrho(\bar{\bar{x}})$, $|y - y_0(\bar{\bar{x}})| \leq \varrho(\bar{\bar{x}})$, $|y' - \bar{y}'(\bar{\bar{x}})| \leq \varrho(\bar{\bar{x}})$, e per qualsiasi $\tilde{y}' \neq y'$, sia ancora $E(x, y; y', \tilde{y}') > 0$;

scelti ad arbitrio due numeri positivi σ e λ, è sempre possibile di

[1] Per $q = f(x, y, y')$, questa disuguaglianza coincide con la (2).

determinare altri due ϱ ed ε in modo che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per ogni curva C di equazione $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 [1] e sia tale che l'insieme dei punti dell'asse x soddisfacenti alla $|y'(x) - y_0'(x)| \geq \sigma$ risulti di misura $\geq \lambda$ ».

2°) « Se C_0 è la stessa curva del teorema precedente e su essa sono ancora verificate le condizioni a) e b); se, inoltre, esistono due numeri positivi Δ e μ, in modo che, per tutti gli $\bar{x}$ considerati nella condizione a) sia sempre $\varrho(\bar{x}) \leq \Delta$, $E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); y_0'(\bar{x}), y_0'(\bar{x}) \pm \varrho(\bar{x})) \geq \mu$; scelto ad arbitrio un $\delta > 0$, è sempre possibile di determinare altri due numeri positivi ε e ϱ, tali che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per tutte le curve C, di cui sopra, appartenenti propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfacenti alla $L - L_0 \leq \delta$, L e L_0 essendo le lunghezze delle C e C_0, rispettivamente ».

In questo secondo enunciato, alla disuguaglianza $L - L_0 > \delta$ può sostituirsi l'altra

$$\int_{a'}^{b'} |y'(x) - y_0'(x)|\, dx \geq \delta,$$

dove (a', b') rappresenta l'intervallo comune ai due (a_0, b_0), (a, b).

Tanto in 1°) che in 2°) le condizioni a) e b) possono sostituirsi con le altre due: che sia sempre $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$ e che esista un numero positivo m tale che, in tutto un intorno della C_0 e per ogni y' in modulo maggiore di uno stesso numero positivo, sia $|y'|^3 f_{y'y'}(x\, y\, y') \geq m$. Queste due condizioni sono, in particolare, soddisfatte se la funzione f è della forma $g(xy)\sqrt{1 + y'^2}$ con $g(xy) > 0$.

Ai teoremi precedenti si può aggiungere questa nuova proposizione:

« Se

$$J_c = \int_c g(x, y, y')\, dx$$

è un altro integrale del tipo (1) e C_0 è la curva più sopra indicata, ed esiste un numero positivo m tale che, per tutti i punti (xy) di un intorno della C_0 valga sempre la $f_{y'y'}(x, y, y') \geq m g_{y'y'}(x, y, y')$, per qualsiasi y', preso ad arbitrio un numero positivo δ se ne possono determinare altri due ε e ϱ in modo che, per ogni curva $C: y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfi alla $J_c - J_{c_0} \geq \delta$, si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$ ».

[1] Ciò vuol dire che, per ogni x comune ai due intervalli (a_0, b_0), (a, b) è $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$, e che i punti i quali appartengono all'uno o all'altro dei due intervalli, senza appartenere ad entrambi costituiscono (al più) due segmenti di lunghezza $< \varrho$, e ciascuno degli archi delle curve C_0 e C che corrispondono a questi segmenti è interno al cerchio di raggio ϱ avente per centro l'estremo corrispondente di C_0.