ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Meccanica. — *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per le notazioni e per la parte bibliografica, ho stabilito con procedimento breve e semplicissimo le equazioni assolute del moto attorno ad un punto fisso di un sistema materiale costituito da un nucleo solido ricoperto da liquido viscoso incompressibile e avente nel suo interno un numero qualunque di cavità, di forma qualunque, riempite da liquidi viscosi compressibili a densità diverse e comunque variabili.

In questa Nota, supponendo sempre i liquidi interni viscosi e compressibili, mi propongo di studiare la variazione dell'energia cinetica del sistema col variare del tempo quando sia nullo il momento rispetto al punto fisso delle forze esterne.

In queste ipotesi, le equazioni intrinseche del problema, stabilite nella Nota precedente, assumono rispettivamente la forma:

$$\text{(I)} \qquad \alpha\Omega' + \Omega\wedge(\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{a} = -mP'_r$$

$$\text{(III)} \qquad \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n \times \mathbf{n}\,.\,\mathbf{n} = mP'_r = -\mathbf{a}$$

$$\text{(IV)} \qquad P'_r \times \mathbf{n} = [P' - \Omega\wedge(P - 0)] \times \mathbf{n} = 0$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} P' = 0$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dP'}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\operatorname{grad}\operatorname{div} P' + \nu\Delta' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP}P'$$

dove le derivate rispetto al tempo t sono indicate con apici e, riferendosi sempre al punto fisso 0, α rappresenta l'omografia d'inerzia della parte rigida, Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione del sistema, **M** il momento dell'impulso relativo al moto della parte fluida, $\mathbf{M}'_r$ la velocità relativa di **M**, **a** il vettore della forza di attrito in un punto qualunque di contatto, P' e P'_r i vettori della velocità assoluta e relativa di un punto generico P delle masse fluide, $\mathbf{F}_n$ il vettore della pressione per unità di superficie esercitata dal fluido, p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, **n** un vettore unitario perpendicolare nei

[1] Psesentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] O. Lazzarino, *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili*. Questi Rend., vol. XXX, 1° sem., pag. 13.

singoli punti di contatto alle pareti σ delle cavità e diretto verso l'esterno, ϱ le densità dei fluidi, λ e μ le solite costanti di Lamé, ν il rapporto μ/ϱ.

Si noti che sulla grandezza del coefficiente m, circa la quale le varie teorie sono discordi, non è necessario fare alcuna ipotesi particolare.

1. *Variazione dell'energia cinetica del sistema.*

Moltiplicando la (I) scalarmente per Ω e tenendo presente che α è dilatazione, si ha

$$(\Omega \times \alpha\Omega)' = -2\Omega \times \mathrm{M}'_r = -2\Omega \times \mathrm{M}'. \tag{1}$$

Inoltre, ammettendo che le forze $\mathbf{F}$ agenti nei punti P delle masse fluide derivino da un potenziale e ponendo $\pi = \int \frac{dp}{\varrho}$, la (VI) può anche scriversi

$$\mathrm{P}'' = \operatorname{grad}(\pi - \mathrm{U}) + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{P}' + \nu\Delta' \mathrm{P}'. \tag{VI$'$}$$

Ora, moltiplicando la (VI') scalarmente per P'_r e integrando rispetto a tutti gli spazi τ delle h cavità del sistema, si ottiene

$$\sum_1^h \int_\tau \mathrm{P}'' \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau = \sum_1^h \int_\tau \left[\operatorname{grad}(\pi - \mathrm{U}) + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right] \times$$
$$\times\, \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau + \sum_1^h \int_\tau \nu\Delta' \mathrm{P}' \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau \,. \tag{2}$$

È facile dimostrare che la prima sommatoria di integrali del secondo membro della (2) è nulla. Infatti, per formole note [1], detta sommatoria può spezzarsi nel seguente modo

$$\sum_1^h \int_\sigma \left[\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right] \mathbf{n} \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma \;+ \tag{a}$$
$$+ \sum_1^h \int_\tau \mathrm{I}_1 \left[\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right)\right] d\tau$$

dove la prima sommatoria s'intende estesa a tutte le superficie σ che racchiudono le h cavità del sistema. Ora, tenendo presente la (IV), si vede immediatamente che la prima sommatoria della (a) risulta nulla; quanto alla seconda si osserva che essa può scriversi successivamente

$$\sum_1^h \int_\tau \mathrm{I}_1 \left[\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right)\right] d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\tau \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) . \, \mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}}\, d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\tau \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) \operatorname{div} \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\sigma \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) . \, \mathrm{P}'_r \times \mathbf{n} \,.\, d\sigma$$

[1] Cfr. C. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, I, pag. 111 (2)]. Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e quindi, risultando anch'essa nulla per la (IV), si ha quanto si voleva dimostrare. Dopo ciò, la (2) porge

$$(3)\qquad \sum_1^h \int_\tau P'' \times P'_r \,.\, d\tau = \sum_1^h \int_\tau \nu \Delta' P' \times P'_r \,.\, d\tau \,.$$

Ora dal primo membro della (3), moltiplicando per ϱ e ponendo $P'_r = P' - \Omega \wedge (P - O)$, si ha

$$\sum_1^h \int_\tau P'' \times P'_r \,.\, \varrho d\tau = \sum_1^h \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau - \Omega \times \sum_1^h \int_\tau (P - O) \wedge P'' \,.\, \varrho d\tau =$$
$$= \sum_1^h \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau - \Omega \times M' ,$$

e quindi, tenendo conto della (1) e ponendo ancora

$$(4)\qquad T = \frac{1}{2}\left[\sum_1^h \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau + \Omega \times \alpha\Omega\right],$$

si può ancora scrivere

$$(5)\qquad \sum_1^h \int P'' \times P'_r \,.\, \varrho d\tau = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\sum_1^h \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau + \Omega \times \alpha\Omega\right] = \frac{dT}{dt} .$$

Allora, osservando che la T, definita dalla (4), rappresenta l'energia cinetica di tutto il sistema e ricordando che è $\nu = \mu/\varrho$, dalle (3) e (5) si deduce immediatamente che « *la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica di tutto il sistema può essere espressa dalla formola*

$$(6)\qquad \frac{dT}{dt} = \sum_1^h \int_\tau \mu \Delta' P' \times P'_r \,.\, d\tau \text{ ».}$$

2. *Generalizzazione di una notevole formola di Joukovsky.*

Il signor Joukovsky [1], trattando la teoria del moto di un solido avente una cavità riempita da liquido viscoso *incompressibile*, dimostrò l'esistenza di una notevole formola che dà la variazione dell'energia cinetica col variare del tempo nell'ipotesi che le forze dell'attrito di contatto fra liquido e solido seguano la nota legge di Stokes. Il signor Stekloff [2], mantenendo l'ipotesi della *incompressibilità* del liquido, dimostrò la formola per qualunque altra ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito. Qui, partendo dalla (6), riesco ad estendere la formola di Joukovsky al caso più generale di liquidi viscosi *compressibili* e per qualunque ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito fra liquidi e solido.

[1] N. Joukovsky, *Sul moto di un corpo solido che ha una cavità riempita da un liquido incompressibile*. S. Pietroburgo, 1885 (in russo), pag. 137.

[2] W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible* etc. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3° serie, tom. I, a. 1909).

Infatti, per formole note [A. V. G. I, pag. 111 (2)], la (6) può scriversi

$$(6') \qquad \mathrm{T}' = \sum_1^h \int_\tau \mu \Delta' \mathrm{P}' \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau = - \sum_1^h \int_\sigma \mu \left(\frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} \right) \times \mathrm{P}'_r d\sigma - $$
$$- \sum_1^h \int_\tau \mu \, \mathrm{I}_1 \left(\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \, \mathrm{K} \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \right) d\tau \,.$$

Ora, supponendo nel caso più generale che l'omografia β di pressione di una qualunque delle masse fluide sia espressa da

$$(7) \qquad \beta = p - 2\mu \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} - \lambda \,.\, \mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \,,$$

si ha

$$\mathbf{F}_n = \beta \mathbf{n} = p\mathbf{n} - 2\mu \left(\frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} \right) - \lambda \,.\, \left(\mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \right) \mathbf{n}$$

e quindi, tenendo anche conto della (IV), si può scrivere

$$- \int_\sigma \mu \left(\frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} \right) \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_\sigma \left[\mathbf{F}_n - p\mathbf{n} + \lambda \left(\mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \right) \mathbf{n} \right] \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_n \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma \,.$$

Inoltre, tenendo conto delle (II) e (III), si ricava

$$\frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_n \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_\sigma [\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}] \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_t \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma = - \frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{a} \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma$$

e quindi, nel caso più generale, la (6') può scriversi

$$(8) \qquad \mathrm{T}' = - \frac{1}{2} \sum_1^h \int_\sigma \mathbf{a} \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma - \sum_1^h \int_\tau \mu \, \mathrm{I}_1 \left(\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \,.\, \mathrm{K} \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}} \right) d\tau \,.$$

Questa è la formola cercata e sussiste evidentemente qualunque sia, nella (II), il valore del coefficiente m che caratterizza la grandezza delle forze dell'attrito di contatto fra liquidi e solido. Perciò si può concludere che « *la formola di Joukovsky, sotto la forma* (8) *ora trovata, sussiste per liquidi viscosi compressibili, qualunque sia l'ipotesi sulla grandezza delle forze dell'attrito di contatto* ». c. d. d.