ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale. II: Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione.* Nota di MARIO PASCAL, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

1. È agevole scrivere il vettore della circuitazione superficiale che abbiamo definito nella Nota I [2]. Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori fondamentali; u, v, w le componenti del vettore $\mathbf{V}$ della velocità; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni direttori del vettore unitario $\mathbf{n}$ parallelo alla normale interna alla superficie σ.

Il vettore della circuitazione superficiale è allora

$$\mathbf{C} = \int_\sigma \mathbf{V} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma . \tag{1}$$

Immaginiamo ora che la superficie σ tenda, appiattendosi, a ridursi ad una porzione piana, limitata da una curva s: il moto del fluido tenderà allora a diventare un moto piano. Ugualmente i vettori $\mathbf{V}\wedge\mathbf{n}$ tendono ad essere uguali e di verso contrario per tutti i punti compresi nell'area piana limitata da s; il modulo di $\mathbf{V}\wedge\mathbf{n}$ ha invece valori finiti per i punti del contorno. Per tali punti, $\mathbf{n}$ giace nello stesso piano fondamentale nel quale è contenuto $\mathbf{V}$.

In tali condizioni l'integrale doppio (1) tenderà — a meno di un fattore infinitesimo — ad un integrale semplice esteso al contorno s.

D'altra parte il vettore $\mathbf{V}\wedge\mathbf{n}$, per ogni punto del contorno s, è normale al piano fondamentale, e l'integrale suddetto rappresenta la risultante di tali vettori paralleli. Il modulo del vettore risultante è, sul piano, uguale all'integrale del modulo di $\mathbf{V}\wedge\mathbf{n}$, esteso a s. Se $\mathbf{t}$ è un vettore unitario parallelo alla tangente a s nel punto generico P, essendo

$$\operatorname{sen}(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{V}, \mathbf{t}),$$

si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(\mathbf{V}\wedge\mathbf{n}) &= \operatorname{mod}\mathbf{V}\cdot\operatorname{mod}\mathbf{n}\cdot\operatorname{sen}(\mathbf{V},\mathbf{n}) = \\ &= \operatorname{mod}\mathbf{V}\cdot\operatorname{mod}\mathbf{t}\cdot\cos(\mathbf{V},\mathbf{t}) = \mathbf{V}\times\mathbf{t}.\end{aligned}$$

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] M. Pascal, *Circuitazione superficiale. I: Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353.

L'integrale (1) pertanto — nelle ipotesi fatte ed a meno di un fattore infinitesimo — diventa

$$\int_s \mathbf{V} \times \mathbf{t}\, ds = \int_s \mathbf{V} \times dP;$$

cioè *la circuitazione superficiale, al tendere della superficie ad una porzione piana limitata dalla curva s, tende all'espressione dell'ordinaria circuitazione lungo il contorno s.*

2. Analogamente a quanto succede per l'ordinaria circuitazione, si ha che, *se esiste potenziale di moto, la circuitazione superficiale è indipendente dalla superficie chiusa lungo la quale è calcolata.*

Se infatti le velocità dipendono da un potenziale, $\varphi = \varphi(x, y, z)$, avendosi

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

per una espressione trovata nella Nota I, si ha

$$C^{xy} = \iint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} p \right\} dx\, dy \tag{2}$$

avendo posto l'equazione della superficie σ sotto la forma $z = z(xy)$.

L'integrale (2) dovrà essere indipendente dalle variazioni di z. Ed invero, chiamando con F la quantità sotto il segno, dal calcolo delle variazioni sappiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial q} = 0;$$

si ha infatti identicamente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} q - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} p + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y} p - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} q = 0.$$

Il ragionamento fatto può evidentemente ripetersi per ciascuna delle altre componenti del vettore della circuitazione superficiale.

3. Con uguale facilità si dimostra la proprietà reciproca, e cioè: *se la circuitazione superficiale è nulla, il moto del fluido è irrotazionale.*

Dalla (1), per una formola nota ([1]), si ha

$$\mathbf{C} = \int_\sigma \mathbf{V} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\tau \operatorname{rot} \mathbf{V}\, d\tau \tag{3}$$

avendo indicato con τ il volume di fluido racchiuso dalla superficie σ.

([1]) C. Burali Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale.* Bologna, Zanichelli, 1909.

Se si suppone nulla la circuitazione, sarà

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{V} = 0 ,$$

e quindi, per un noto teorema [1], e supponendo (ciò che si può fare senza togliere di generalità) il campo τ semplicemente connesso, il vettore $\mathbf{V}$ è il gradiente di una funzione uniforme, cioè è

$$\mathbf{V} = \mathrm{grad}\, \Phi$$

in cui Φ è il potenziale di velocità.

La formola (3) ci dà il modo, infine, di enunciare, nei riguardi della circuitazione superficiale, un teorema che è l'analogo di quello di Stokes per l'ordinaria circuitazione.

Ricordando infatti che $\frac{1}{2}\mathrm{rot}\, \mathbf{V}$ è il vettore della velocità istantanea di rotazione delle particelle di fluido in moto, si può dire che *la circuitazione superficiale è uguale al doppio della somma delle velocità istantanee di rotazione, moltiplicate per l'elemento del volume racchiuso dalla superficie lungo la quale la circuitazione è calcolata.*

Mineralogia. — *Sulla vera natura della Rosasite.* Nota I del dott. C. Perrier [2], presentata dal Socio E. Artini [3].

Il prof. Lovisato descrisse, parecchi anni or sono [4], un nuovo minerale nettamente cristallizzato di rame e zinco, di color verde-chiaro tendente all'azzurrognolo, con lucentezza sericea nella frattura fresca, lievemente mammellonare, proveniente dalle miniere di Rosas nel Sulcis (Sardegna), al quale minerale egli, per la sua provenienza, diede il nome di Rosasite.

La composizione chimica, determinata in base all'analisi eseguita dal dott. Rimatori, che aveva ottenuto i seguenti risultati: $H_2O = 0{,}21$; PbO = tracce; $ZnO = 33{,}57$; $CuO = 36{,}34$; $CO_2 = 30{,}44$; somma $= 100{,}56$, sarebbe stata secondo Lovisato, la seguente:

$$CuO : CuCO_3 : ZnCO_3 = 1 : 1{,}157 : 2\ 33$$

corrispondente, quindi, approssimativamente ad un composto di questo tipo:

$$2\,CuO \,.\, 3\,CuCO_3 \,.\, 5\,ZnCO_3 \,.$$

(1) C. Burali Forti e R. Marcolongo, loc. cit.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal prof. Zambonini.

(3) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(4) D. Lovisato, *Nuovo minerale della miniera di Rosas (Sulcis, Sardegna).* Questi Rend. XVII, 2 (1908), pag. 723.