ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Meccanica. — *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Il signor W. Stekloff, in una sua lunga Memoria (1), ha stabilito, mediante calcoli lunghi e notevolmente complicati, le equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente una cavità riempita da liquido viscoso ma *incompressibile*. Equazioni analoghe erano state già trovate, per altra via, dal prof. V. Volterra (2) nel caso di un sistema costituito da un solido e da un liquido omogeneo che può supporsi riempire una cavità del solido.

In questa Nota, partendo dall'equazione intrinseca del moto attorno ad un punto fisso di un sistema qualunque semirigido (3), riesco a dedurre con estrema semplicità le equazioni relative al *caso più generale* di un solido avente un numero qualunque di cavità, di forma qualunque, riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili.

1. *Equazioni del moto di un sistema semirigido qualunque.* — Un sistema materiale (S), costituito da una parte rigida e da una parte non rigida comunque distribuita, possa ruotare attorno ad un punto fisso O. Rispetto ad O sia α l'omografia d'inerzia della parte rigida, $\mathbf{M}$ il momento dell'impulso dovuto al moto della parte non rigida, $\mathbf{M}_e$ il momento delle forze esterne o che si possano considerare come tali, Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione di tutto il sistema. Per il 2° teorema dell'impulso, l'equazione intrinseca del moto di (S) può scriversi, indicando con apici le derivate rispetto al tempo t,

$$(\alpha\Omega + \mathbf{M})' = \mathbf{M}_e \,. \tag{1}$$

(1) W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes.* (Annal. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, tome I, 1909).

(2) V. Volterra, *Sur la théorie des variations des latitudes.* (Acta Mathem., t. XXII, 1899).

(3) O. Lazzarino: (a) *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, pag. 109, 1917); b) *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili.* (Ibid., pag. 233).

Se $\mathbf{M}'_s$, $\mathbf{M}'_r$ sono rispettivamente i vettori della velocità di trascinamento e relativa di $\mathbf{M}$, si ha $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_s + \mathbf{M}'_r = \Omega \wedge \mathbf{M} + \mathbf{M}'_r$ e quindi la (1) può scriversi ancora, ricordando che $(\alpha\Omega)' = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega$, sotto la forma

$$\alpha\Omega' + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_e . \tag{2}$$

L'equazione del moto sotto la forma (1) o (2) comprende evidentemente tutti i casi particolari nei quali si facciano particolari ipotesi sulla distribuzione e sulla natura della parte non rigida. Se questa ha moti stazionarî la (2) si semplifica essendo in tal caso $\mathbf{M}'_r = 0$ [v. l. c. (a)].

2. *Caso dei liquidi viscosi.* — Il sistema (S) sia costituito da un corpo rigido e da masse fluide viscose, di densità diversa, che riempiano un certo numero h di cavità del solido. Le forze esterne applicate alla parte solida siano tali che le forze agenti nei punti P delle masse fluide risultino derivanti da un potenziale U, funzione dei punti, che ammetta il gradiente. Allora il momento $\mathbf{M}_e$ può considerarsi come risultante dei due momenti $\mathbf{M}_1$ ed $\mathbf{M}_2$, di cui $\mathbf{M}_1$ si riferisce alle forze applicate alla parte rigida, ed $\mathbf{M}_2$ alle forze agenti nei punti P delle masse fluide. Indicando con $\tau_1 \ldots \tau_h$ gli spazi delle h cavità e con $U_1, \ldots U_h$ i potenziali delle forze agenti nei punti delle rispettive masse fluide, si può scrivere, per le ipotesi fatte,

$$\mathbf{M}_2 = -\sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{3}$$

Allora, se $\mathbf{M}$ è il momento dell'impulso rispetto ad O dovuto al moto di tutte le masse fluide, la (2) permette di scrivere immediatamente l'equazione del moto del sistema e si ha

$$\alpha\Omega' + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_1 - \sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{4}$$

Le equazioni (163) dello Stekloff [v. l. c. (1), pag. 82], trovate con procedimento affatto diverso e quanto mai lungo e scabroso, sono un *caso particolare* della (4) da cui si deducono per $h = 1$ e considerando un solo fluido viscoso ed *incompressibile.*

Indicando con $\mathbf{T}$ l'energia cinetica della parte rigida ed osservando che è $\operatorname{grad}_\Omega \mathbf{T} = \alpha\Omega$, la (4) assume la forma

$$(\operatorname{grad}_\Omega \mathbf{T})' + \Omega \wedge \mathbf{M} + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_1 - \sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{5}$$

La (5) è del tipo Lagrange-Liouville e, per il caso di una cavità riempita da liquido omogeneo ed incompressibile, equivale alle equazioni trovate, per altra via, dal prof. Volterra [l. c. (2), pp. 309 e 310].

Ma per la soluzione del problema la (4) o (5) non è sufficiente, occorre ancora stabilire le condizioni ai limiti e nell'interno delle masse fluide.

3. *Condizioni ai limiti.* — Trattandosi di liquidi viscosi, esistono sulle pareti interne delle cavità delle forze di attrito le quali, come dimostra la esperienza, dipendono dalla viscosità del liquido e dalla natura delle pareti e sono dirette nei singoli punti di contatto secondo la velocità relativa di uno dei corpi rispetto all'altro. Indicando perciò con P un punto di contatto, con P'_r la sua velocità relativa, con $\mathbf{a}$ il vettore della forza di attrito in P e prescindendo da particolari ipotesi sulla *grandezza* di questa forza, sulla quale grandezza sono fra loro discordi le varie teorie, si può scrivere, se m è il rapporto fra i moduli di $\mathbf{a}$ e di P'_r,

$$\mathbf{a} = -mP'_r. \tag{6}$$

Ciò premesso, per la determinazione delle condizioni ai limiti basta esprimere che nei punti di contatto le forze di attrito fanno equilibrio alla pressione del fluido.

Se, quindi, $\mathbf{F}_n$ è il vettore di questa pressione in un punto P della superficie interna σ di una delle cavità, $\mathbf{F}_t$ la componente di questa pressione secondo il piano tangente in P a σ, $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale in P a σ e diretto verso l'esterno della cavità, si ha

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}\,. \tag{7}$$

Allora, la *prima condizione ai limiti* può scriversi

$$\mathbf{F}_t = mP'_r, \tag{8}$$

mentre la *seconda* è evidentemente data dalla relazione

$$P'_r \times \mathbf{n} = 0 \tag{9}$$

la quale esprime che « *la velocità relativa delle masse fluide nei punti di contatto è tutta tangenziale* ».

4. *Condizioni nei punti interni delle masse fluide.* — Deve anzitutto sussistere l'equazione di continuità che notoriamente può scriversi (¹)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} P' = 0 \tag{10}$$

dove P' è la velocità assoluta della particella fluida che al tempo t occupa la posizione P e la densità ϱ del fluido si suppone funzione del tempo.

Inoltre è noto che, se in un punto P interno ad un fluido viscoso in moto $\mathbf{F}$ è il vettore della forza riferità all'unità di massa e p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, il vettore P'

(¹) Cfr. C. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, parte II, pag. 62 (3)]. Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

deve soddisfare alla condizione [AVG, II, pag. 62 (2)]

$$\frac{dP'}{dt} = F - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,P' + \nu\Delta' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP}P' \tag{11}$$

dove, essendo μ il coefficiente di viscosità, si ha $\nu = \mu/\varrho$, $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$.

Nel caso del *fluido incompressibile* l'equazione di continuità è $\mathrm{div}\,P' = 0$ e la (11) si scrive

$$\frac{dP'}{dt} = F - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP}P'. \tag{12}$$

Se le forze derivano da un potenziale U, osservando ancora che è (AVG, I, pag. 95)

$$(dP'/dP)\,P' = (1/2)\,\mathrm{grad}\,P'^2 + (\mathrm{rot}\,P') \wedge P',$$

la (11) può anche scriversi

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,P'^2 + (\mathrm{rot}\,P') \wedge P' = -\,\mathrm{grad}\left[U + \int\frac{dp}{\varrho}\right] + \nu\Delta' P' + \tag{13}$$
$$+ \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,P'.$$

Applicando ad ambo i numeri della (13) l'operatore *rot* si ha per i liquidi viscosi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{rot}\,P'}{\varrho}\right) = \frac{dP'}{dP}\left(\frac{\mathrm{rot}\,P'}{\varrho}\right) + \nu\Delta'(\mathrm{rot}\,P') \tag{14}$$

che è l'equazione analoga a quella di Helmholtz per i liquidi perfetti (AVG, II, pp. 59 e 62).

Riepilogo. — Se le cavità del solido sono riempite da liquidi viscosi le cui densità variano solo col tempo, le equazioni del problema son date dalla (4) o (5), che caratterizza il moto di tutto il sistema, dalle condizioni (8) e (9) ai limiti, e dalle (10) e (11) che definiscono i moti delle masse fluide nelle rispettive cavità. Se inoltre le densità dei fluidi dipendono dalla pressione, allora son necessarie delle ipotesi complementari che diano la legge di variazione della densità col variare della pressione.

Nel caso più generale di un sistema costituito da un nucleo solido ricoperto da liquido viscoso incompressibile e contenente nel suo interno delle cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse ecc., alle equazioni precedenti occorre aggiungere la condizione $p = \text{cost.}$ che deve essere soddisfatta alla superficie libera del fluido viscoso che ricopre il nucleo solido.