ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota I del Corrispondente Francesco Severi.

In questa ed in alcune Note successive esporrò una dimostrazione del teorema concernente il numero degli integrali semplici indipendenti di 1ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica F, quale risulta dalla fusione e da un rimaneggiamento profondo del metodo da me seguito per la dimostrazione originaria del teorema [1] e di quello esposto da Poincaré in uno de' suoi ultimi lavori [2]. Il concetto della dimostrazione cui alludo è il seguente:

Indicata con $q = p_g - p_a$ l'irregolarità della superficie $F[f(x, y, z) = 0]$, d'ordine m, e con p il genere della sua sezione piana generica, si possono scegliere q superficie linearmente indipendenti d'ordine $m-2$:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \ldots, \varphi_q(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

aggiunte ad F, le cui equazioni sieno di grado $m-3$ in x, z, e $p-q$ superficie aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m-3$:

$$\varphi_{q+1}(x, y, z) = 0 \ldots, \varphi_p(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

[1] Com'è noto i fondamenti della teoria degl'integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica furon posti dalle classiche ricerche di Picard. Il teorema cui si allude nel testo, concernente il numero degli integrali semplici di 1ª (e di 2ª) specie ed il numero dei loro periodi, è il risultato complessivo di ricerche (in ordine cronologico) mie, di Enriques e di Castelnuovo.

[2] Annales de l'école normale supérieure, 1910.

per guisa che le (1), (2) stacchino sopra un generico piano $y = \text{cost.}$ le p curve d'ordine $m - 3$ linearmente indipendenti, aggiunte alla curva sezione di F con quel piano. Queste p curve divengono dipendenti solo per un numero finito di *valori critici* del parametro y. Vi è poi un numero finito di *valori singolari* di y in corrispondenza a ciascuno dei quali la sezione piana $y = \text{cost.}$ si abbassa di genere.

Le (1) posson inoltre essere scelte in modo che non esista alcun valore di y critico pel loro sistema (cioè in modo che esse stacchino sopra *ogni* piano $y = \text{cost.}$ q curve indipendenti).

Ciò premesso, pongasi

$$u_i = \int \frac{\varphi_i}{f'_z} dx \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{3}$$

cosicchè, per un valore generico di y, l'integrale (3) è un integrale abeliano di 1ª specie della curva $f(x, y, z) = 0$ (integrale che può diventare di 3ª specie soltanto in corrispondenza ai valori singolari di y).

Fissato uno, O, degli m punti d'intersezione di F colla retta all'infinito comune ai piani $y = \text{cost.}$ (punti base del fascio di sezioni prodotte su F da questi piani), poniamo in O l'origine dei cammini d'integrazione per gl'integrali (3). Designamo inoltre con $x_1 (x_1, y, z_1), \ldots, x_p (x_p, y, z_p)$ p punti variabili sulla curva $f(x, y, z) = 0$, corrispondente a un dato valor generico di y, e scriviamo le equazioni:

$$u_i (x_1) + \ldots + u_i (x_p) \equiv c_i \text{ [modd. periodi degli integrali (3)]}, \tag{4}$$

ove le c_i sono costanti arbitrarie ed i cammini d'integrazione conducenti allo stesso punto x_j sono i medesimi per tutti gl'integrali. In base al teorema d'inversione di Jacobi, le (4) saranno soddisfatte da un gruppo ben determinato di p punti della sezione considerata.

Al variare del parametro y, questo gruppo di punti descrive una *curva analitica* C. Quali sono le condizioni affinchè questa curva sia *algebrica*?

La curva C sega una sezione piana generica $y = \text{cost.}$ in p punti diversi dai punti base del fascio $y = \text{cost.}$; ma non è escluso ch'essa possa passare con molteplicità infinita per qualcuno di tali punti. Quando ciò accada, C non è algebrica. Ebbene si prova che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva analitica* C *sia algebrica, è che le costanti* $c_{q+1}, \ldots, c_p$ *abbiano valori nulli* (*mentre le prime* q *costanti* $c_1, \ldots, c_q$ *posson avere valori arbitrari*).

La dimostrazione di questo teorema fondamentale si svolge qui in modo assai più semplice e spedito che nella Memoria di Poincaré, anche per la eliminazione di taluni concetti superflui (valori critici di prima e di seconda specie, valori critici effettivi ed apparenti ecc.), che sono collegati a particolarità proiettive della superficie e non alle sole proprietà invarianti per

trasformazioni birazionali; e per la maniera più elementare con cui si usufruisce delle funzioni theta.

Ognuna delle coordinate di un punto variabile sulla curva C è una certa funzione del parametro y e si dimostra, in primo luogo, ch'essa non può presentare che singolarità di tipo polare, per ogni valore, anche singolare, di y, diverso dai valori critici; mentre essa presenta singolarità essenziali in corrispondenza ai valori critici, ogni qualvolta le $c_{q+1}, \ldots, c_p$ sieno diverse da zero. Quando invece le $c_{q+1}, \ldots, c_p$ sieno nulle, le singolarità essenziali spariscono e la C diviene pertanto algebrica.

Prendendo $c_{q+1} = \cdots = c_p = 0$, e facendo variare comunque le $c_1, \ldots, c_q$, si ottiene su F un sistema continuo ∞^q di curve algebriche C, a due e due non equivalenti linearmente, e da ciò si trae, come nella mia Memoria sul teorema d'Abel per le superficie [1], che gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad F sono in numero di q con $2q$ periodi.

Il metodo di Poincaré conduce a stabilire l'esistenza su F di un numero finito di *curve primitive*, la cui nozione equivale sostanzialmente a quella della *base* cui pervenni nel 1905.

La odierna rielaborazione getta un ponte di passaggio semplice fra l'una e l'altra nozione, attraverso ad un criterio di equivalenza algebrica tra curve della superficie F. Varî sono i criteri di equivalenza che ho esposto in precedenti lavori; ma si tratta in generale di criteri di equivalenza lineare per curve che già si sappia essere equivalenti algebricamente (appartenenti cioè ad un medesimo sistema algebrico). Per l'equivalenza algebrica ho dato in passato un criterio geometrico ed un criterio trascendente in cui intervengono gl'integrali semplici di 3ª specie [2].

Il criterio cui pervengo alla fine di questo lavoro richiede invece l'intervento dei soli integrali semplici di 1ª specie.

1. Com'è lecito, quando si tratta di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, supponiamo la superficie F dotata di una sola linea doppia nodale e punti tripli ordinari. Sia $\varphi(x, y, z) = 0$ un'aggiunta d'ordine $m-2$ (superficie passante per la linea doppia di F), la quale contenga la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$ e seghi fuori di r sopra un particolare piano $y = y_0$, una curva d'ordine $m-3$, per cui passi pure una superficie aggiunta $\psi(x, y, z) = 0$, d'ordine $m-3$. Avrà allora luogo, per ogni x, z, l'identità:

$$\varphi(x, y_0, z) \equiv \psi(x, y_0, z),$$

donde:

$$\varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z) \equiv (y - y_0)\, \eta(x, y, z),$$

[1] Annali di Matematica, 1905.
[2] Mathematische Annalen, 1906.

$\eta(x, y, z) = 0$ essendo una superficie aggiunta d'ordine $m - 3$; e questa prova che la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ stacca su ogni piano $y = \text{cost.}$ una curva appartenente al sistema ivi segnato dalle superficie d'ordine $m - 3$ aggiunte ad F.

L'ipotesi e la conclusione possono evidentemente riferirsi anche al piano $y = \infty$, in quanto questo può trattarsi come un piano proprio introducendo l'omogeneità nelle coordinate, oppure operando su F colla trasformazione omografica $x' = \frac{x}{y}, y' = \frac{1}{y}, z' = \frac{z}{y}$.

Se una superficie d'ordine $m - 2$ aggiunta ad F e passante per una retta r, taglia fuori di r, sopra un particolar piano passante per r, una curva appartenente al sistema lineare h segato su quel piano dalle superficie aggiunte d'ordine $m - 3$, lo stesso accade sopra ogni altro piano del fascio.

2. Ciò posto, contiamo da quanti parametri dipendono le superficie aggiunte φ d'ordine $m - 2$, passanti per r, che staccano sui piani $y = \text{cost.}$ curve del sistema lineare h.

Per ogni curva di h passano ∞^{p+p_a} superficie φ (essendo p_a il genere aritmetico di F e $p + p_a - 1$ la dimensione del sistema lineare Σ delle aggiunte d'ordine $m - 3$); al variare del piano $y = \text{cost.}$ le curve dei sistemi h dipendono da $p - q$ parametri (ove $q = p_g - p_a$ è l'irregolarità di F e $p - q - 1$ la dimensione di h sopra un particolare piano $y = \text{cost.}$) [1]; ma ogni φ contiene ∞^1 curve dei sistemi h; dunque le φ dipendono da $(p + p_a) + (p - q) - 1 = 2p + p_a - 1 - q$ parametri.

Ora le φ che passano per r dipendono da $2p + p_a - 1$ parametri (perchè esse staccano sopra un piano $y = \text{cost.}$ un sistema lineare completo di dimensione $p - 1$) e costituiscono una varietà lineare V, di dimensione $2p + p_a - 1$, cui appartiene la varietà algebrica W, di dimensione $2p + p_a - 1 - q$, delle φ passanti per r e seganti i piani $y = \text{cost.}$ secondo curve dei sistemi h.

Si può pertanto scegliere entro V un sistema lineare di dimensione $q - 1$ che non abbia in comune alcun elemento colla varietà W. Dunque:

È possibile scegliere q aggiunte ad F d'ordine $m - 2$, linearmente indipendenti, e passanti per la retta r:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \ldots, \varphi_q(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

[1] Che il sistema lineare Σ abbia la dimensione $\varrho = p + p_a - 1$, e quindi che la dimensione del sistema h segato da Σ sopra un piano $y = \text{cost.}$ sia $p - q - 1$ risulta da un bel teorema di Picard (ved. ad es. una mia Nota in questi Rendiconti, 1908). Qui però non occorre d'invocare questo teorema. Basta invece ricordare (Enriques) che fra le trasformate birazionali della data superficie se ne può sempre scegliere una F (dotata di linea doppia), per la quale il sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane sia regolare, cioè di dimensione ϱ. Una volta costruita la teoria degl'integrali semplici di 1ª specie sul particolare modello F, risulterà, a posteriori, alla maniera di Picard, che per ogni superficie quel sistema aggiunto è regolare.

tali che una superficie qualunque del sistema lineare

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0, \tag{6}$$

non stacchi MAI *fuori di r, sopra alcun piano del fascio r, una curva ivi segata da una superficie aggiunta d'ordine* $m - 3$.

Ne deriva che *su* OGNI *piano del fascio r il sistema lineare* (6) *stacca q curve linearmente indipendenti*, perchè se sopra un piano $y = y_0$ le curve (5) fossero linearmente dipendenti, cioè se esistessero valori $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_q^{(0)}$ non tutti nulli delle λ, tali che:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y_0, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, y_0, z) \equiv 0,$$

risulterebbe:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, y, z) \equiv (y - y_0) \psi(x, y, z),$$

$\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$; e la superficie $\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x\, y\, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x\, y\, z) = 0$ staccherebbe sopra ogni piano $y =$ cost. una curva dei sistemi lineari h, il che contrasta col modo come è stato scelto il sistema (6).

Paleontologia — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

V.

Mulino di San Giovanni.

Nella roccia schistosa scura, assai scarsamente calcarea sovrastante al Calcare scuro probabilmente eocenico che termina a Sud la serie Triassica del Gazo, sul Cantarena, al Mulino di San Giovanni ed in luoghi vicini lungo la via del Gazo, trovansi tracce di *Hexasterophora* probabilmente *Lychniscosa*.

La roccia (Quarzo anche in granuli derivanti da sabbia estranea come qualche granulo di Plagioclasio, Sericite abbondante, Clorite talora in grossi fasci, Limonite, Magnetite, Ematite, Rutilo spesso abbondante in groviglio di microscopici aghetti, Apatite, Calcite scarsissima) è costituita alternativamente da sottili noduletti e lenti quarzose chiare rispondenti allo Spongiario, con piccole geodi di Quarzo, e da straterelli argillosi scuri con tritumi minori apparentemente della stessa specie. L'intreccio dictyonale a maglie quadrate si vede solo in pochi tratti, al solito con *Ostia* puntiformi di *Epirhize* con intreccio a losanga intorno, ed altre aperture circolari con intreccio raggiato.

All'intorno di questi canali verticali verificai che in senso longitudinale secondante i medesimi l'intreccio è in serie parallele longitudinali e