ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

aghetti minuti gialli e cristalli di solfato di soda. I primi agitando si portano facilmente sul filtro e così si raccolgono. Le acque madri si tirarono quasi a secco sempre a bassa temperatura; quindi si riprese con qualche goccia di idrato sodico, si filtrò e con anidride carbonica precipitò ancora un poco di nitrosoguanidina che fu purificata

gr. 0,434 di sostanza dettero 23 c. c. di azoto a 10° e 755 mm.
trovato % N = 63,51 calcolato per CH_4N_4O = 63,64

Sto ora facendo ricerche con alcune biguanidi sostituite.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui numeri reali e le grandezze.* Nota I di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (*).

Ritorno sull'argomento, già ampiamente trattato [1], dei *numeri reali* e delle *grandezze*, per introdurre alcune modificazioni che hanno notevole interesse scientifico e pratico, ma che non portano alterazione al contenuto generale di L. M. e dei lavori precedenti [2].

1. Se $x \varepsilon$ grd − Zero [pag. 381, (6), (7)] la frase « Grandezza omogenea con x » [3], ovvero il simbolo equivalente [pag. 416] $Q_0 x$, abbreviazione di $(ax) | a$ ‘Q_0, non indica una classe ben determinata, perchè la definizione di Grd [pag. 381, (5)] non implica [4] la esistenza di una sola Grd cui appartenga x.

(*) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

[1] Cfr. specialmente i lavori miei e di S. Catania citati nella mia *Logica Matematica* (Manuali Hoepli, 2ª ediz. 1919), alla quale si riferiscono le citazioni entro parentesi quadre e che citerò con la abbreviazione L. M. — In particolare cfr. mia Nota *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem., pp. 489-496, 1915).

[2] Ho trovato e introdotto tali modificazioni in seguito ad alcune osservazioni ed esempî, che saranno citati volta per volta che occorrono, comunicatimi dal sig. G. Bertelli di Spezia. — Il sig. Bertelli suggerisce pure di cambiare, nella definizione della *coppia* particolare $(a;a)$ [pag. 136, (1)], $fx = \iota a$ in $fx = \iota a \cup \iota x$, perchè altrimenti si ha $(a;a;\iota b) = (b;b;\iota a)$ anche quando $a -= b$. Infatti la *dimostrazione* della *condizione di eguaglianza* di due terne [pp. 138-140, (2')] sussiste quando $(a;b)\,x$, $(a';b')\,x$ dipendono realmente da x, il che avviene [pag. 136, (1)] solo quando $a -= b$ e $a' -= b'$; mentre si ha sempre tale dipendenza con l'indicato cambiamento di fx, le altre definizioni di *coppia, terna,*... [pag. 37] restando invariate.

[3] G. Peano, *Aritmetica generale* .... (Paravia, 1902), pag. 136, ove trovasi anche la notazione $Q_0 x$.

[4] Ciò risulta dai seguenti esempi nei quali: h, k sono simboli *fissi* di Oper; f, g sono Ops [pag. 113, (1)] *fissi*; Lung è l'ordinaria classe delle *lunghezze*; m è una par-

Se $u \varepsilon$ Grd [pag. 381, (5)] allora $u \varepsilon$ Grand h [pag. 378, (1)] essendo h una operazione, ma di tali operazioni h non ne esiste una sola ([5]) [contrariamente a quanto è erroneamente affermato a pag. 406].

Dalla definizione dei Q_0 assoluti [pag. 388 e pag. 404] e della somma, $+$, per essi, risulta che $Q_0 \varepsilon$ Grd. Segue pure che se a, b sono dei Q_0 anche ab (che è contemporaneamente *prodotto algebrico* e *funzionale* di b per a) è un Q_0; quindi i Q_0 sono, ad un tempo, Ops e Opd per se stessi, il che contradice (cfr. ([2])) alla definizione di Ops e Opd [pag. 113, (1), (1')], definizione che non può essere, in generale cambiata a causa dell'assurdo che si presenterebbe per i simboli di *operazione* [pag. 118] qualora un operatore potesse esserlo a destra o a sinistra indifferentemente ([6]).

Gli inconvenienti formali ora citati si tolgono facilmente come è indicato nei numeri seguenti.

2. Per comodo del lettore riporto qui, con alcune modificazioni formali, quanto è esposto nella mia Nota del 1915 (cfr. ([1])) e che riguarda i Q_0, N_0, R_0

---

ticolare lunghezza non nulla, ad es., il *metro*; ιC, C_1, F, G sono classi particolari di grandezze

(A) (cfr. ([2])). $\iota C . \equiv . (1 ; x) \mid x ‘ Q_0$, $C_1 . \equiv . (x : 1 \mid x ‘ Q_0$, $x, y \varepsilon Q_0 .\therefore \supset_{x,y} .\therefore (1 ; x)\, h\, (1 ; y) . \equiv . (1 ; x+y) : (x ; 1)\, k\, (y ; 1) . \equiv (x+y ; 1)$; si deduce [pag. 378 (1)]; $\iota C \varepsilon$ Grand h, $C_1 \varepsilon$ Grand k, $(1 ; 1) \varepsilon (\iota C \cap C_1)$, $\iota C -\!= C_1$.

(B) (cfr. ([2])). $x \varepsilon \mathrm{Lung} - \iota m . \supset_x . f(x ; m) \equiv (x ; m)$, $f(m ; m) \equiv m$, $F \equiv f(x ; m) \mid x ‘ \mathrm{Lung}$, $x, y \varepsilon \mathrm{Lung} . \supset_{x,y} . f(x ; m)\, h\, f(y ; m) \equiv f(x+y ; m)$; si deduce; $F \varepsilon$ Grand h, $m \varepsilon (F \cap \mathrm{Lung})$, $F -\!= \mathrm{Lung}$.

(C) . $x \varepsilon \mathrm{Lung} - \iota m . \supset_x . g(x ; m) \equiv x/m$, $g(m ; m) \equiv m$, $G \equiv g(x : m) \mid x ‘ \mathrm{Luug}$, $x, y \varepsilon \mathrm{Lung}, \supset_{x,y} . g(x ; m)\, h\, g(y ; m) \equiv g(x+y ; m)$; si deduce: $G \varepsilon$ Grand h, $m \varepsilon (G \cap \mathrm{Lung})$, $G -\!= \mathrm{Lung}$.

([5]) Se, ad es., (cfr. ([2])) m è un intero non nullo e si definisce la operazione $+_m$ per i Q_0 ponendo

$$x, y \varepsilon Q_0 : \supset_{x,y} : x +_m y . \equiv . (x^m + y^m)^{1/m}$$

si ha che $Q_0 \varepsilon$ Grand $+_m$. Analogamente per x, y appartenenti ad altre classi ordinarie di grandezze; ad es., se x, y sono lunghezze si può chiamare *somma* di x con y la lunghezza della *ipotenusa* del triangolo rettangolo (proprio o pur no) che ha per *cateti* dei segmenti di lunghezze x, y (cfr. ([2])).

([6]) Volendo, il che non è conveniente, lasciare ai Q_0 la proprietà ora indicata, si può, sempre eliminando l'indicato assurdo, dare di Ops (e analogamente di Opd) la definizione seguente:

$$\mathrm{Ops} . \equiv . \Omega - \Omega^* \cap f \ni [\exists \{\mathrm{Cls}' \cap u \ni (x \varepsilon u . \supset_x . fx \varepsilon \mathrm{Elem})\}]$$

dando insieme il significato di Ω e Ω^* [pag. 156]. In tal modo ogni Ops può anche essere Opd e viceversa e occorre escludere *praticamente* la contemporaneità in generale. — Ma è preferibile la soluzione che indichiamo in queste Note, ritornando a forme già introdotte (cfr. ([1]), 1915, e lavori di S. Catania) definendo la classe assoluta Q_0, sempre dipendentemente dalle grandezze, ma in modo che i Q_0 non siano operatori per se stessi.

relativi ad una classe omogenea di grandezze. Tutte le proposizioni di questo numero hanno come ipotesi comune. sottintesa [pag. 378]

$$h \varepsilon \mathrm{Oper.}\ u \varepsilon \mathrm{Grand}\ h.$$

La classe dei *numeri reali* relativa ad u ed h resta definita ponendo

(1) $$\mathrm{Q}_0(u, h) . = . \bar\iota\, [\mathrm{Cls'Ops}(u . u) \cap w \ni \{\mathrm{A} . \mathrm{B} . \mathrm{C} . \mathrm{D}\}]$$

avendo A, B, C, D il significato stabilito a pag. 388 di L. M.

La somma, $+_{u,h}$, per i $\mathrm{Q}_0(u, h)$ è definita da

(2) $$x, y \varepsilon \mathrm{Q}_0(u, h) : \supset_{h,u,x,y} : x +_{u,h} y . = . \bar\iota\, [\mathrm{Q}_0(u, h) \cap z \ni \{a \varepsilon u . \supset_a . za = (xa)\, h\, (ya)\}]$$

e risulta subito [pag. 378, (1)]

(3) $$\mathrm{Q}_0(u, h)\, \varepsilon\, \mathrm{Grand} +_{u,h} .$$

Della classe $\mathrm{Q}_0(u, h)$ se ne può definire l'elemento nullo, $0'_{u,h}$ [pag. 379, (2)], e l'*unità*, $1_{u,h}$, relativi ad u ed h, ponendo

(4) $$0'_{u,h} . = . 0_{\mathrm{Q}_0(u,h), +_{u,h}}$$

(5) $$1_{u,h} . = . \bar\iota\, [\mathrm{Q}_0(u, h) \cap x \ni \{a \varepsilon u . \supset_a . xa = a\}].$$

Si ottiene la classe $\mathrm{N}_0(u, h)$, poi $\mathbf{R}_0(u, h)$, degli *interi* e *razionali* relativi ad u ed h, come nella Nota del 1915 (cfr. [1]) con tutte le ordinarie loro proprietà. Il *prodotto algebrico*, $\times_{u,h}$, per i $\mathrm{Q}_0(u, h)$ coincide col loro *prodotto funzionale* [pag. 196].

Per il *rapporto*, rispetto ad h, di due elementi di u si ha

(6) $$a, b \varepsilon u . b -= 0_{u,h} : \supset_{h,u,a,b} : a /_{u,h} b . = . \bar\iota\, [\mathrm{Q}_0(u, h) \cap x \ni \{x b = a\}]$$

e risulta

(7) $$a \varepsilon u - \iota 0_{u,h} . \supset_{h,u,a} . u = (x a) \mid x \text{`} \mathrm{Q}_0(u, h)$$

(8) $$\mathrm{Q}_0(u, h) = u /_{u,h} (u - \iota 0_{u,h}).$$

In virtù della (3), come caso particolare per i $\mathrm{Q}_0(u, h)$,

(9) $$x, y \varepsilon \mathrm{Q}_0(u, h) . y -= 0'_{u,h} : \supset_{h,u,x,y} : x /_{u,h} y . = . x /_{\mathrm{Q}_0(u,h), +_{u,h}} y$$

e si ha

(10) $$\mathrm{Hp}\,(9) . \supset_{h,u,x,y} . (x /_{u,h} y)\, y \times_{h,u} y = x$$

e quindi il simbolo /, nel quale gli indici u, h non possono esser soppressi, dà la ordinaria operazione divisione.