# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

## DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulle equazioni integrali:*

$$\int_a^b \theta(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots).$$

Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrisp. O. Tedone.

L'inesistenza di una soluzione effettiva [1] delle equazioni integrali:

$$\int_a^b \theta(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots), \tag{1}$$

oggetto, com'è noto, di numerose ricerche [2], è qui stabilita in modo diretto, semplicissimo. Ciò ha particolare importanza per lo sviluppo della teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali: sussiste infatti il seguente teorema, del quale è nota parimenti una dimostrazione diretta, elementare.

*Affinchè il sistema delle funzioni ortogonali rispetto alla funzione caratteristica* $p(x)$:

$$V_k(x) \qquad (k = 0\,,1\,,2\,,\ldots),$$

*sia chiuso, è necessario e sufficiente che l'equazione di chiusura, ad esso relativa:*

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)]^2\, dx = \sum_0^{\infty}{}_k\, A_k^2 \quad , \quad A_k = \int_a^b p(x)\, f(x)\, V_k(x)\, dx\,,$$

(1) Una soluzione delle (1), sommabile insieme col suo quadrato, si dice *effettiva*, se è diversa da zero in punti di $(a\,,b)$, costituenti un insieme di misura non nulla, o, brevemente, se non è *quasi dappertutto* uguale a zero.

(2) Cfr. Lerch: *a*) *O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících* [Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze, II, Kl., Bd. I (1892). n. 33, S. 1-7]: *b*) *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel* [Acta Mathematica, Bd. XXVII (1903), S. 346-347]; Phragmén, *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions* [Acta Math., Bd. XXVIII (1904), S. 361-363]; Stieltjes, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* [Bd. II (Paris, 1905), pp. 337-339]; Landau, *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* [Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, tomo XXV (1908), pp. 343-345]; Moore, *On certain Constants analogous to Fourier's Constants* [Bulletin of the american mathematical Society (New York, May, 1908)]; Stekloff, *Sur la théorie de fermature des sistèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables* [Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg, classe physico-mathématique, vol. XXX, n. 4 (1911), pag. 25]; Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali* [Rendic. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI (1913), pp. 16-17]; Cipolla, *Sui sistemi di funzioni ortogonali che ammettono un sistema complementare finito* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (1915), pag. 13].

*sia soddisfatta da tutte le funzioni di un sistema di funzioni:*

$$\varphi_i(x) \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

*sommabili insieme coi loro quadrati, e tali che non esistano soluzioni effettive per le equazioni integrali:*

$$\int_a^b \theta(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0 \ \text{(1)} \qquad (i=0,1,2,\ldots).$$

1. Escludiamo dapprima l'esistenza di una soluzione continua, non nulla, delle equazioni (1).

Ammesso che una tale soluzione possa esistere, s'indichi con $\theta_1(x)$. Sia $(x_1, x_2)$ un intervallo, interno all'intervallo $(a, b)$, nel quale la $\theta_1(x)$ si mantenga di uno stesso segno ed in valore assoluto maggiore di una quantità $m > 0$. Se si pone:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(b-a)^2},$$

risulta:

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) > 1 & (x_1 < x < x_2), \\ 0 < \varphi(x) < 1 & (a \leqq x < x_1 \ ; \ x_2 < x \leqq b). \\ \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 1. & \end{array}$$

Se ne deduce:

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_{x_1'}^{x_2'} \theta_1(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx \right| = +\infty \qquad (x_1 < x_1' < x_2' < x_2),$$

e quindi a maggior ragione:

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_{x_1}^{x_2} \theta_1(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx \right| = +\infty,$$

mentre per ogni $n$ si ha:

$$\left| \int_a^{x_1} \theta_1(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{b} \theta_1(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx \right| \leqq M(b-a-x_2+x_1),$$

M essendo il massimo valore assoluto della $\theta_1(x)$ nell'intervallo $(a, b)$. Non può dunque essere:

$$\int_a^b \theta_1(x)\,[\varphi(x)]^n\,dx = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

(1) Cfr. Severini, loc. cit. (2), pp. 18-19. Cfr. anche Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXI, serie 5ª (1° sem. 1912), pp. 682-683].

come dovrebbe invece verificarsi, se $\theta_1(x)$ fosse una soluzione effettiva delle (1).

2. Dopo quanto precede è facile dimostrare, che non può nemmeno esistere per le (1) una soluzione sommabile insieme col suo quadrato, la quale non sia quasi dappertutto uguale a zero. Nell'ipotesi contraria, indicando con $\theta_2(x)$ questa soluzione, pongasi:

$$\Phi(x) = \int_a^x \theta_2(x)\,dx \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Si ha:

$$\int_a^b \theta_2(x)\,x^n\,dx = [x^n\,\Phi(x)]_a^b - n\int_a^b \Phi(x)\,x^{n-1}\,dx \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots),$$

e poichè:

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0\,,$$

risulta:

$$\int_a^b \Phi(x)\,x^{n-1}\,dx = 0 \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots).$$

La $\Phi(x)$ è dunque una soluzione continua delle (1), e deve aversi (§ 1) identicamente:

$$\Phi(x) = 0\,;$$

quindi:

$$\Phi'(x) = 0\,.$$

Poichè quasi dappertutto risulta [1]:

$$\Phi'(x) = \theta_2(x)\,,$$

il teorema è senz'altro dimostrato.

## Matematica. — *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.* Nota I di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

J. W. Lindeberg [2] ha dimostrato, per gli integrali in forma parametrica

(1) $$\mathrm{I}_\mathrm{C} = \int_\mathrm{C} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,dt$$

del Calcolo delle variazioni, la seguente notevole proposizione:

[1] Cfr. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, pag. 125 [Paris, Gauthier-Villars (1904)].

[2] *Ueber einige Fragen der Variationsrechnung* [Mathemat. Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-354].

« Se $C_0$ è una curva, aperta e priva di punti multipli, dotata ovunque di tangente e curvatura, sempre variabili in modo continuo, sulla quale siano soddisfatte, in senso stretto, le note condizioni di Legendre e Weierstrass, scelti comunque due numeri positivi $\varepsilon$ e $\varepsilon'$, si può determinarne un altro $\varrho$ in modo che sia sempre $I_C > I_{C_0}$, per ogni curva ordinaria [1] $C$ avente gli stessi estremi della $C_0$, appartenente tutta all'intorno ($\varrho$) di questa curva e soddisfacente, inoltre, alla condizione [condiz. $a$)] che risulti maggiore di $\varepsilon$ la lunghezza complessiva dei suoi archi in ogni punto dei quali la tangente alla curva forma un angolo maggiore di $\varepsilon'$ con la tangente alla $C_0$ nel piede della normale condotta, per il punto stesso, alla $C_0$ ».

Necessitandomi, per certe mie ricerche, una estensione di tale teorema, sono stato condotto a confrontarlo con un'altra proposizione, da me stabilita altrove [2] e che qui riproduco:

« Se $C_0$ è una curva continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, e $I_C$ è un integrale (1) *regolare*, scelto comunque un numero positivo $\delta$, è possibile di determinarne un altro $\varrho$ in modo che sia sempre $I_C - I_{C_0} > \varrho$, per ogni altra curva $C$, continua e rettificabile, appartenente propriamente all'intorno ($\varrho$) della $C_0$ [3] e soddisfacente, inoltre, alla condizione [condizione $\alpha$)] $L - L_0 \geq \delta$, dove $L$ e $L_0$ indicano le lunghezze delle curve $C$ e $C_0$, rispettivamente ».

E poichè ho potuto constatare che le due condizioni $a$) e $\alpha$) risultano equivalenti, quando siano ambedue portate sulle curve $C_0$ e $C$ del teorema del Lindeberg, sono stato indotto a cercare di superare la difficoltà che, nell'estensione di tale teorema a curve $C_0$ non aventi ovunque tangente e curvatura variabili in modo continuo, presenta la formulazione stessa della condiz. $a$), col sostituire a questa condizione quella $\alpha$). Sono così pervenuto alla seguente proposizione generale [4]:

« Se $C_0$ è una curva continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, e in ogni suo punto $(x_0, y_0)$ in cui esista la tangente alla curva stessa è

$$E(x_0, y_0\ ;\ \cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0\ ;\ \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) > 0,$$

per tutti i $\theta$ tali che $\theta - \theta_0$ sia distinto da zero e da un multiplo intero

(1) Composto cioè di un numero finito di archi, aventi ovunque tangente variabile in modo continuo.

(2) *Sul caso regolare nel Calcolo delle variazioni* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXV (1° sem. 1913)].

(3) Intendo con ciò che la $C$ appartenga tutta all'intorno ($\varrho$) della $C_0$ ed abbia i suoi estremi distanti meno di $\varrho$ dagli estremi corrispondenti di questa curva.

(4) Per la dimostrazione di questa e delle altre proposizioni contenute nella presente Nota, rimando al 1° volume dei miei *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, dei quali si sta ora iniziando la stampa presso la Casa Editrice Zanichelli.

di $2\pi$ — E essendo la nota funzione di Weierstrass del Calcolo delle variazioni, e $\theta_0$ l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva $C_0$ forma con quella positiva dell'asse $x$ — mentre per ogni altro punto $(x_0, y_0)$ della $C_0$, in cui manchi la tangente, si può determinare un angolo $\tilde{\theta}_0$ (non necessariamente sempre lo stesso) tale che sia

$$E(x_0, y_0 \; ; \cos\tilde{\theta}_0, \operatorname{sen}\tilde{\theta}_0 \; ; \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) > 0,$$

per tutti i $\theta$ per i quali $\theta - \tilde{\theta}_0$ è distinto da zero e da un multiplo intero di $2\pi$;

scelto ad arbitrio un numero positivo $\delta$, è sempre possibile di determinarne altri due $\varepsilon$ e $\varrho$ in modo che, per ogni curva continua e rettificabile $C$, appartenente propriamente all'intorno $(\varrho)$ della $C_0$ e soddisfacente alla disuguaglianza $L - L_0 \geq \delta$ — $L$ e $L_0$ essendo le lunghezze delle $C$ e $C_0$ — si abbia $I_C - I_{C_0} > \varepsilon$ ».

È degno di rilievo il fatto che in questo teorema, a differenza da quello del Lindeberg, *non* si ammette l'ipotesi che, sulla $C_0$, sia verificata la condizione di Legendre in senso stretto; inoltre, il teorema è dato per *tutte* le curve $C$ che appartengono propriamente all'intorno $(\varrho)$ della $C_0$, *abbiano esse o no* gli stessi estremi di tale curva.

Osserverò ancora che se, invece delle curve $C$ appartenenti *propriamente* all'intorno $(\varrho)$ della $C_0$, si considerano soltanto quelle curve $C$ che appartengono *ordinatamente* all'intorno detto (¹), allora nell'ultimo enunciato può senz'altro sopprimersi la condizione che la $C_0$ sia aperta e priva di punti multipli.

Alla proposizione data più sopra può aggiungersene un'altra.

« Se

$$J_C = \int_C G(x\,y\,x'y')\,dt$$

è un altro integrale del tipo (1) e si indicano con $F_1$ e $G_1$ i noti invarianti di Weierstrass relativi alle funzioni $F$ e $G$ (²), ed esiste un numero positivo $m$ tale che, in tutti i punti di un intorno di una data curva $C_0$, continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, si abbia sempre $F_1(x, y, x', y') \geq m\,G_1(x\,y\,x'y')$, per qualsiasi coppia $(x'y')$, senza però che in nessun punto $(x\,y)$ l'uguaglianza fra i due membri valga per tutte le coppie $(x'y')$, scelto ad arbitrio un numero positivo $\delta$, è sempre possibile

(¹) Vale a dire, quelle curve che possono porsi in corrispondenza biunivoca ordinata e continua con la $C_0$, in modo che la distanza fra due punti corrispondenti risulti sempre minore di $\varrho$.

(²) È $\quad F_1 \equiv \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} \equiv -\frac{1}{x'y'} F_{x'y'} \equiv \frac{1}{x'^2} F_{y'y'} \quad ; \quad G_1 \equiv \ldots$

di determinarne altri due, $\varrho$ ed $\varepsilon$, così che, per ogni curva C appartenente propriamente all'intorno ($\varrho$) della $C_0$ e soddisfacente alla disuguaglianza $J_C - J_{C_0} \geq \delta$, si abbia $I_C - I_{C_0} > \varepsilon$ ».

Anche per questa proposizione la condizione che la $C_0$ sia aperta e priva di punti multipli si può sopprimere completamente se ci si limita a considerare soltanto le curve C che appartengono ordinatamente all'intorno ($\varrho$) della $C_0$.

**Vulcanologia.** — *L'unità del sistema Vulsinio.* Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio CARLO VIOLA.

Il sistema Vulsinio è costituito principalmente di due crateri contigui, quello di Latera di grandi dimensioni, e quello di Bolsena di dimensioni eccezionali e che non trovano riscontro in nessun altro cratere d'Europa. Molte altre bocche di minore importanza, alcune tuttora riconoscibili altre presunte, alcune centrali altre periferiche completano il sistema.

È noto che tra gli argomenti che servirono a sostenere la non cratericità della Conca di Bolsena fu messa la variabilità dei materiali che la circondano, mentre avrebbe dovuto bastare il loro esame ad occhio nudo e la determinazione della loro successione per fare almeno sospettare, se non per dedurre con sicurezza, che le loro variazioni quando superano limiti molto ristretti sono avvenute *nel tempo* e non già *nello spazio*. E sarebbe stato agevole estendere tale conclusione a tutto il sistema deducendone la sua *unità*, sia pure come semplice ipotesi che solo uno studio petrografico approfondito avrebbe potuto verificare.

Va rilevato che nei Cimini con un simile studio non fu possibile dedurre l'unità del sistema perchè le variazioni della composizione mineralogica sono avvenute anche nello spazio. Ma, sapendosi che esse dipendono dalle condizioni della cristallizzazione e quindi possono al pari di queste essere molto estese e mascherare la ristrettezza delle variazioni dei magmi elementari, con la determinazione di questi ultimi si potevano eliminare le influenze estranee ai focolari. Disgraziatamente le incertezze che ancora regnano nelle teorie magmatiche hanno lasciato dei dubbii serii sui risultati ottenuti [1]. Invece nel sistema Vulsinio, malgrado le forme esterne più complesse e molto più estese, si può arrivare a conclusioni più sicure e forse più semplici, poichè le variazioni petrografiche dei materiali contemporanei sono piccole ed è possibile potersi basare su di esse essendo piccole *a fortiori* le variazioni magmatiche, i calcoli delle quali, se non saranno di osta-

[1] V. Sabatini, *Vulcani Cimini*. Mem. Carta Geol. d'It., XV, 258 e ultimo capitolo.