ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1921.
V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane. III: Le varietà di Jacobi.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO.

9. Tra le varietà abeliane [1] rientrano, come casi particolari notevoli, le *varietà di Jacobi.* Si indica con questo nome una V_p, i cui punti corrispondono birazionalmente ai gruppi di p punti, G_p, di una curva C di genere p; supporremo soddisfatta la condizione che gruppi equivalenti (speciali) di C abbiano per immagine un solo punto di V_p. Se indichiamo con $j_1(\zeta), \dots, j_p(\zeta)$ i valori di p integrali indipendenti di prima specie nel punto ζ di C, la V_p si definisce esprimendo che le coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_{p+1}$ di un suo punto generico sono $p+1$ funzioni abeliane indipendenti [II, (21)] dei p parametri

$$u_i = j_i(\zeta_1) + j_i(\zeta_2) + \cdots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, p). \tag{29}$$

La matrice dei periodi di queste funzioni può sempre supporsi ridotta al tipo normale

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}). \tag{30}$$

[1] Ved. le due Note precedenti, che verranno indicate con I e II; questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, fasc. 2°, pag. 50, e fasc. 4°, pag. 99.

La V_p di Jacobi presenta, rispetto alle varietà abeliane generali, alcune particolarità dipendenti dal fatto che i gruppi speciali G_p della curva C (appartenenti dunque alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1}) hanno per immagini in V_p i punti di una varietà algebrica W_{p-2} a $p-2$ dimensioni (ogni punto della quale rappresenta infiniti G_p equivalenti).

Nella V_p di Jacobi è sempre contenuto un sistema continuo ∞^p $\{\Theta\}$ di varietà a $p-1$ dimensioni, rappresentate dall'annullarsi di una funzione Θ del 1° ordine (ϑ riemanniana). Ciascuna di quelle rappresenta gli ∞^{p-1} G_p contenuti in una serie non speciale g_{2p-1}^{p-1}. Se questa serie si riduce alla g_{2p-2}^{p-1} canonica, ai cui gruppi sia stato aggiunto un punto fisso a, la corrispondente varietà Θ diviene (come diremo) *speciale*, passa per la W_{p-2} e rappresenta l'insieme dei gruppi G_p che hanno un punto fisso a. Esistono ∞^1 varietà Θ speciali; due, tre, ..., $p-1$ di esse si intersecano, fuori di W_{p-2}, in una varietà a $p-2$, $p-3$, ..., 1 dimensione, la quale rappresenta i G_p con $2, 3, \ldots, p-1$ punti fissi.

10. Supponiamo ora che in V_p esista una varietà intermediaria, a $p-1$ dimensioni, Φ, cogli interi caratteristici m_{ik} ed il determinante $\delta = \sqrt{\|m_{ik}\|} > 0$ (I, n 1; II, n. 5); la Φ formerà parte di un sistema continuo $\{\Phi\}$ $\infty^{p+\delta-1}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà, delle quali h scelte entro il sistema $\{\Theta\}$ e $p-h$ nel sistema $\{\Phi\}$, si determina seguendo le tracce di II, n. 6. Si formerà il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$, dove r è un parametro e le μ_{ik} sono tutte nulle tranne le $\mu_{i,i+p} = -\mu_{i+p,i} = 1$; se ne costruirà il pfaffiano; se $\binom{p}{h} I_{p-h}$ è il coefficiente di r^h nel detto polinomio, il numero richiesto sarà

$$[\Theta^h \Phi^{p-h}] = p!\, I_{p-h}. \tag{31}$$

Questo risultato può anche esprimersi in forma diversa, ove si riprenda la rappresentazione geometrica dello Scorza (I, n. 2), in cui le p righe della matrice (30) hanno per immagini p punti di uno spazio Σ_{2p-1}, i quali vi determinano uno spazio τ a $p-1$ dimensioni. Ai sistemi continui $\{\Theta\}$ e $\{\Phi\}$ sono associate due reciprocità nulle dello spazio Σ_{2p-1}

$$A \equiv \Sigma(\xi_l \eta_{p+l} - \xi_{p+l}\eta_l) = 0\ , \qquad B \equiv \Sigma\, m_{ik}\, \xi_i \eta_k = 0$$
$$(l = 1, \ldots, p\ ; \quad i, k = 1, \ldots, 2p)$$

che mutano ogni iperpiano per τ in un punto di τ. La omografia prodotto $A^{-1}B$, che ha il determinante

$$\delta^2 = \|m_{i\,p+1} \ldots m_{i\,2p} \quad -m_{i1} \ldots -m_{ip}\| \qquad (i = 1, \ldots 2p),$$

trasforma τ in se stesso. Segue (Scorza) l'esistenza di p^2 costanti π_{hl} (per

$h, l = 1, \ldots, p$) le quali soddisfano alle $2p^2$ uguaglianze

$$(32)\qquad \begin{cases} \pi_{hl} = m_{l\,p+h} - m_{l1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{lp}\,\sigma_{hp}\,, \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\,\sigma_{il} = m_{p+l\,p+h} - m_{p+l\,1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{p+l\,p}\sigma_{hp}\,. \end{cases}$$

Di qua risulta (con Hurwitz) che le p relazioni

$$(33)\qquad j_h(\zeta'_1) + \cdots + j_h(\zeta'_p) = \pi_{h1}\,j_1(\zeta) + \pi_{h2}\,j_2(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\,j_p(\zeta)$$

definiscono una corrispondenza algebrica sulla curva C, per la quale ad ogni punto ζ corrispondono p punti $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_p$; la corrispondenza è simmetrica nel senso di Rosati, cioè equivalente alla propria inversa.

Per interpretare il risultato teniamo presente che una varietà intermediaria Φ, entro V_p, rappresenta su C una serie algebrica ∞^{p-1} di gruppi di p punti, cioè una γ_p^{p-1}, il cui gruppo generico è non speciale. La serie (come la Φ) appartiene ad un sistema continuo $\infty^{p+\delta-1}$. Viceversa ogni serie γ_p^{p-1} di gruppi non equivalenti è rappresentata da una Φ. Si vede dunque che *ad ogni serie algebrica* γ_p^{p-1} *della curva* C *è collegata una corrispondenza algebrica simmetrica sulla* C. Precisamente, data la γ_p^{p-1}, od una qualunque serie del sistema continuo a cui essa appartiene, restano determinate le infinite corrispondenze che, nella rappresentazione analitica, presentano gli stessi moltiplicatori π_{hl} o $-\pi_{hl}$. Quale sia il legame geometrico tra la serie ed una delle dette corrispondenze sarà visto nelle ultime righe di questa Nota.

Coi coefficienti π_{hl} formiamo la equazione caratteristica

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} + r & \ldots & \pi_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{p1} & \ldots & \pi_{pp} + r \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(35)\qquad r^p + i_1\,r^{p-1} + \cdots + i_{p-1}\,r + i_p = 0 \qquad (i_p = \delta).$$

I caratteri i_h sono *invarianti* della corrispondenza (33) o della serie γ_p^{p-1}, sia rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, sia rispetto ai cambiamenti dei tagli canonici sulla relativa riemanniana. Il loro significato geometrico risulta chiaro, se si ricorda (¹) che il quadrato del determinante (34) uguaglia il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$ sopra considerato, e che quindi il polinomio (35) ne è il pfaffiano. Con ciò la (31) diviene

$$(36)\qquad [\Theta^h\,\Phi^{p-h}] = h!\,(p-h)!\;i_{p-h}$$

e dà luogo al seguente enunciato:

(¹) Ved. ad es. Rosati, *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche* ..., in Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. 53 (1917).

Insieme ad una serie algebrica γ_p^{p-1} sopra una curva di genere p si considerino le infinite serie del sistema continuo a cui essa appartiene, e le serie $\gamma_p^{p-2}, \gamma_p^{p-3}, \ldots$ formate dai gruppi G_p comuni a due, tre ... di quelle serie. Il numero dei gruppi G_p che stanno in una di queste γ_p^h e in h serie lineari g_{2p-1}^{p-1} è generalmente finito ed è dato dalla formola (36).

11. Vi sono però altri caratteri più espressivi della γ_p^h che interessa conoscere; ad es. l'*indice*, cioè il numero dei gruppi della serie che contengono h punti generici di C. È questo il numero delle intersezioni, entro V_p, di $p-h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$ e di una varietà V_{p-h} rappresentante i G_p con h punti fissi; la quale V_{p-h}, come fu già detto (n. 9), è intersezione parziale di h varietà Θ speciali. Si tratta dunque di decidere quante delle intersezioni (36) vengano assorbite dalla W_{p-2} per cui passano ora le h varietà Θ. Questo difficile problema di geometria numerativa son riuscito a risolvere soltanto col rendere particolare la curva C; procedimento non immune da obbiezioni. Siccome però le formole ottenute trovano conferma in tutti i casi in cui ho potuto trattare il problema con metodi rigorosi, credo opportuno accennare a quel procedimento e al risultato, la conoscenza del quale potrà suggerire altre vie di ricerca

Consideriamo $h-1$ varietà Θ passanti per la W_{p-2}, le quali si segano, fuori di questa, in una V_{p-h+1}, immagine dei G_p con $h-1$ punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$. La V_{p-h+1} interseca W_{p-2} lungo una varietà W_{p-h}, immagine dei G_p *speciali* con $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ fissi. La stessa V_{p-h+1} è poi segata da una nuova Θ passante per W_{p-2}, lungo quella W_{p-h} e la V_{p-h} dei G_p con h punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h$. Si ha dunque, con una scrittura assai chiara,

$$[\Theta V_{p-h+1}] = W_{p-h} + V_{p-h}\,; \tag{37}$$

e la relazione vale anche se la Θ è una varietà generica del sistema $\{\Theta\}$, purchè si intenda allora che la varietà a $p-h$ dimensioni del primo membro e la varietà spezzata del secondo membro appartengono ad uno stesso sistema continuo entro V_{p-h+1}. Seghiamo ora queste due varietà (37) con una stessa varietà U_h ad h dimensioni, la quale le intersechi in un numero finito di punti. Avremo la uguaglianza tra numeri di intersezioni

$$[\Theta V_{p-h+1}\, U_h] = [W_{p-h}\, U_h] + [V_{p-h}\, U_h]\,. \tag{38}$$

Per stabilire una relazione tra i due addendi a secondo membro, particolarizziamo la curva C, ammettendo che essa sia iperellittica, ed indichiamo con a_i, a_i' punti coniugati nella g_2^1. Allora i G_p speciali aventi le immagini in W_{p-h} sono gruppi che hanno come fissi i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ e contengono inoltre o il punto a_1', o il punto $a_2', \ldots,$ o il punto a_{h-1}', o una coppia generica di punti coniugati bb'. La W_{p-h} si spezza dunque in $h-1$ varietà del sistema continuo a cui appartiene la V_{p-h}, più una

W_{p-h-1} immagine dei G_p contenenti $a_1, a_2, \dots, a_{h-1}, b, b'$. Poichè la W_{p-h-1} non sarà incontrata generalmente dalla U_h, segue che

$$[W_{p-h}\, U_h] = (h-1)[V_{p-h}\, U_h]$$

e quindi, (38),

$$[\Theta V_{p-h+1}\, U_h] = h[V_{p-h}\, U_h].$$

Se si chiama U_{h-1} la intersezione di U_h con una Θ, poi U_{h-2} la intersezione di U_{h-1} con una Θ, ecc., si ha una serie di relazioni dalle quali, eseguendo il prodotto, si ottiene

$$(39) \qquad [V_p\, U_0] = h!\, [V_{p-h}\, U_h],$$

dove il primo membro indica il numero delle intersezioni di U_h con h varietà Θ. In particolare, se U_h è l'intersezione di $p-h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$, il primo membro della (39) ha il valore (36). Segue che

La serie γ_p^h ha l'indice

$$(40) \qquad \nu_h = (p-h)!\, i_{p-h},$$

donde una nuova interpretazione degli invarianti i.

Lo stesso procedimento, mutando il significato particolare di U_h, ci fa vedere che *il numero dei gruppi della serie γ_p^h che hanno $h_1 \leqq h$ punti fissi ed appartengono ad $h - h_1$ serie g_{2p-1}^{p-1} è*

$$(41) \qquad \frac{(p-h)!\, h!}{h_1!}\, i_{p-h}.$$

La formola (40) ha una notevole interpretazione analitica. Sia $\varphi((u))$ una funzione intermediaria dei parametri $u_1, \dots, u_p$ dati dalle (29). Formiamo le $k = p - h$ equazioni

$$(42) \qquad \varphi((j(\zeta_1) + j(\zeta_2) + \cdots + j(\zeta_k) - e^{(l)})) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

ove le incognite sono k punti $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ della curva C, e le $e_1^{(l)}, e_2^{(l)}, \dots, e_p^{(l)}$ sono pk costanti. *Il numero dei gruppi di soluzioni $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ delle equazioni* (42) *è $k!\, i_k$.*

Se le funzioni φ sono Θ del primo ordine, nel qual caso $i_k = \binom{p}{k}$, il risultato è stato stabilito da Poincaré e Wirtinger, ed è pur contenuto in una formola colla quale Comessatti e Göhner assegnano il numero dei gruppi di k punti comuni a k serie lineari di dimensione $k-1$. Nella stessa ipotesi, per $k = 1$, si ha un noto teorema di Riemann. L'indicatore logaritmico, di cui egli si vale per stabilirlo, può pure applicarsi ad una funzione intermediaria qualsiasi e conduce a trovare $\sum_{l=1}^{p} m_{l,l+p}$ soluzioni, il qual numero si riconosce proprio uguale ad i_1.

Anche il procedimento dato da Riemann per stabilire le relazioni tra i p zeri di una ϑ si estende alla φ e fa vedere che tra le radici $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(i_1)}$ della (42), per $k=1$, passano le relazioni

$$(43)\quad j_h(\zeta^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta^{(i_1)}) = \pi_{h1} e_1^{(1)} + \cdots + \pi_{hp} e_p^{(1)} + \pi_h \quad (h=1,\dots,p),$$

dove le π_{hl} sono date dalle (32) e le π_h sono costanti, indipendenti dalle $e^{(1)}$. Segue che la corrispondenza simmetrica (i_1, i_1) determinata sulla C dalla γ_p^{p-1}, quando in essa si tengano fissi $p-2$ punti e si chiamino ζ, ζ_1 i rimanenti due di ciascuno degli ∞^1 gruppi, è rappresentata dalle formole

$$(44)\quad j_h(\zeta_1^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta_1^{(i_1)}) = -[\pi_{h1} j_1(\zeta) + \cdots + \pi_{hp} j_p(\zeta)] + \pi_h$$

ed è quindi equivalente alla (33); donde una semplice interpretazione geometrica del primo enunciato del n. 10.

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota I del Socio C. Segre [1].

1. Data una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con *punto doppio* in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una *cuspide*, e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da π, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Fra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi, in generale, *cinque*, che dànno sezioni aventi in x un *tacnodo* [2].

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori 1, 2, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du:dv$, ponendo le 6 equazioni:

$$(1)\quad (\xi x) = 0\ ,\ (\xi x^1) = 0\ ,\ (\xi x^2) = 0$$

$$(2)\quad (\xi x^{11})\,du + (\xi x^{12})\,dv = 0\ ,\ (\xi x^{12})\,du + (\xi x^{22})\,dv = 0$$

$$(3)\quad (\xi x^{111})\,du^3 + 3(\xi x^{112})\,du^2 dv + 3(\xi x^{122})\,du\,dv^2 + (\xi x^{222})\,dv^3 = 0\ ,$$

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei « *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* » (Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 30, 1910_2, pag. 87), da citarsi in seguito brevemente con « *Prelim*i ». — Citerò invece con « *Sup.* » la mia Nota anteriore « *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* » (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, pag. 1047). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.