ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Anche il procedimento dato da Riemann per stabilire le relazioni tra i p zeri di una ϑ si estende alla φ e fa vedere che tra le radici $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(i_1)}$ della (42), per $k=1$, passano le relazioni

$$(43)\quad j_h(\zeta^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta^{(i_1)}) = \pi_{h1}\, e_1^{(1)} + \cdots + \pi_{hp}\, e_p^{(1)} + \pi_h \quad (h=1, \dots, p),$$

dove le π_{hl} sono date dalle (32) e le π_h sono costanti, indipendenti dalle $e^{(1)}$. Segue che la corrispondenza simmetrica (i_1, i_1) determinata sulla C dalla γ_p^{p-1}, quando in essa si tengano fissi $p-2$ punti e si chiamino ζ, ζ_1 i rimanenti due di ciascuno degli ∞^1 gruppi, è rappresentata dalle formole

$$(44)\quad j_h(\zeta_1^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta_1^{(i_1)}) = -[\pi_{h1}\, j_1(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\, j_p(\zeta)] + \pi_h$$

ed è quindi equivalente alla (33); donde una semplice interpretazione geometrica del primo enunciato del n. 10.

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota I del Socio C. Segre [1].

1. Data una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con *punto doppio* in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una *cuspide*, e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da π, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Fra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi, in generale, *cinque*, che dànno sezioni aventi in x un *tacnodo* [2].

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori 1, 2, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du:dv$, ponendo le 6 equazioni:

$$(1)\qquad (\xi x) = 0\ ,\ (\xi x^1) = 0\ ,\ (\xi x^2) = 0$$

$$(2)\qquad (\xi x^{11})\, du + (\xi x^{12})\, dv = 0\ ,\ (\xi x^{12})\, du + (\xi x^{22})\, dv = 0$$

$$(3)\qquad (\xi x^{111})\, du^3 + 3(\xi x^{112})\, du^2 dv + 3(\xi x^{122})\, du\, dv^2 + (\xi x^{222})\, dv^3 = 0\ ,$$

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei « *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* » (Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 30, 1910_2, pag. 87), da citarsi in seguito brevemente con « *Prelim.* ». — Citerò invece con « *Sup.* » la mia Nota anteriore « *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* » (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, pag. 1047). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.

dalle quali, eliminando le ξ_i, si ha per $du:dv$ l'equazione determinante

$$(4)\quad |x, x^1, x^2, x^{11}du + x^{12}dv, x^{12}du + x^{22}dv, x^{111}du^3 + 3x^{112}du^2dv + 3x^{122}du\,dv^2 + x^{222}dv^3| = 0,$$

che determina appunto 5 direzioni $du:dv$, ossia 5 tangenti, e quindi poi 5 iperpiani ξ.

Le formole (1), (2), (3) provengono, per dualità, dalle (14), (22), (26) del n. 23 dei « *Prelim*[i] ». Ma esse si hanno anche subito direttamente, scrivendo i punti di F prossimi a x così:

$$x(u + du, v + dv) = x + x^1 du + x^2 dv + \tfrac{1}{2}(x^{11}du^2 + 2x^{12}du\,dv + x^{22}dv^2) + \cdots,$$

e sostituendo nell'equazione dell'iperpiano ξ [cfr. il n. 8 di « *Sup.* », ove f è l'attuale (ξx)]. Se ξ verifica le (1), la sezione risulta con punto doppio in x, avendo ivi le tangenti date da $(\xi x^{11})du^2 + 2(\xi x^{12})du\,dv + (\xi x^{22})dv^2 = 0$. Perchè si abbia un tacnodo colla tangente $du:dv$ occorre: che questa annulli le 1e derivate di quella forma quadratica, il che dà le (2); e inoltre annulli la forma cubica in du, dv, che vien dopo nello sviluppo dell'equazione della curva: e ciò dà la (3).

Dirò *tangenti principali* di F in x le 5 rette nelle direzioni determinate dalla (4), e *linee principali* di F quelle che sono inviluppate da tali tangenti, ossia le linee integrali di quell'equazione differenziale (4). Per ogni punto di F ne passeranno in generale 5.

2. Per un'applicazione da farsi poi, converrà osservare che l'iperpiano ξ, a sezione tacnodale, che verifica le (1), (2), (3) per una radice $du:dv$ della (4), si può anche riguardare come un iperpiano tangente in pari tempo al cono quadrico V_4^2, prima nominato, relativo al punto x di F, ed all'analogo cono V_4^2 relativo al punto $(u + du, v + dv)$. In fatti, il 1° cono è rappresentato come inviluppo dalle (1) e: $(\xi x^{11})(\xi x^{22}) - (\xi x^{12})^2 = 0$. Si scriverà che ξ appartiene anche al 2° cono differenziando totalmente rispetto a u, v queste quattro equazioni. Con ciò, dalle (1) si ottengono soltanto le (2); e dall'altra [che è poi conseguenza delle (2)]:

$$[(\xi x^{22})(\xi x^{111}) + (\xi x^{11})(\xi x^{122}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{112})]du +$$
$$+ [(\xi x^{22})(\xi x^{112}) + (\xi x^{11})(\xi x^{222}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{122})]dv = 0.$$

Ora quest'equazione, applicando convenientemente le (2), si viene a trasformare appunto nella (3).

3. Possiamo definire direttamente le linee principali anche così. Consideriamo la varietà V_3 luogo degli ∞^1 piani π tangenti a F nei punti x di una data linea L. Se quella varietà non è *sviluppabile* (ordinaria), e quindi tale che lungo ogni piano generatore ammetta un S_3 tangente fisso, vi sarà per ogni π un iperpiano (che lo unisce al piano successivo, inci-

dente a π in x) contenente gli ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 nei punti di π («*Prelim*.» § 1): diciamo brevemente un iperpiano tangente alla V_3 lungo π. Orbene volendo che L sia linea principale di F, questo equivarrà a dire che: o la V_3 è sviluppabile; o, se no, per ciascun π l'iperpiano tangente alla V_3 lungo esso ha contatto quadripunto con L nel corrispondente punto x: cioè ne contiene l'S_3 osculatore, e non soltanto il piano osculatore, come avverrebbe per una linea qualunque.

Invero si pensi L rappresentata da $v = v(u)$. La V_3 è il luogo del piano π determinato dai punti x, x^1, x^2: cioè il luogo del punto $x + \lambda x^1 + \mu x^2$, al variare di u, λ, μ. L'S_3 tangente in quel punto ad essa è l'S_3 del punto stesso e dei suoi primi derivati, cioè $x^1, x^2, x^1 + v' x^2 + \lambda(x^{11} + v' x^{12}) + \mu(x^{12} + v' x^{22})$. Esso sta, comunque si prendan λ, μ, nello spazio determinato dai punti

$$(5) \qquad x, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^{11} + v' x^{12}, \quad x^{12} + v' x^{22}.$$

Questo sarà dunque, nel caso generale, l'iperpiano tangente alla V_3 lungo π. D'altra parte l'S_3 osculatore alla $v = v(u)$ in x è quello dei punti $x, x^1 + v' x^2, x^{11} + 2v' x^{12} + v'^2 x^{22} + v'' x^2, x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222} + 3v'' x^{12} + 3v' v'' x^{22} + v''' x^2$. I primi tre di essi (che dànno il piano osculatore a L) stanno già sull'iperpiano (5). Dire che vi giace anche il 4° è come dire che vi sta $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222}$: ossia equivale a scrivere la (4).

Se poi per ogni x di L i punti (5) stanno in un S_3, sicchè la V_3 è sviluppabile, ciò viene a dire che gli elementi omologhi delle prime 5 colonne del determinante (4) son legati da una stessa relazione lineare; e quindi, senz'altro, la (4) è verificata dalla L: ossia questa è una linea principale [1].

4. Quando F è una superficie *sviluppabile*, vale a dire un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva di S_5, segue subito dalle ultime parole dette che *tutte* le linee segnate su F sono principali.

Consideriamo invece il caso che F sia una superficie non sviluppabile, di quelle (studiate in «*Sup.*») per le quali le 6 coordinate $x_i(u\,v)$ son soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali (di Laplace):

$$(6) \qquad A x^{11} + B x^{12} + C x^{22} + D x^1 + E x^2 + F x = 0,$$

ove A, B, ... son date funzioni di u, v; e cerchiamo quali sono per essa le linee principali.

Applicando la (6) alle sei x_i, moltiplicando per ξ_i, — ove l'iperpiano ξ

[1] Un'altra proprietà geometrica delle 5 tangenti principali è data da E. Bompiani al n. 7 della Nota «*Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*» (Atti Acc. Torino, 48, 1912-13, pag. 393).

sia uno di quelli considerati al n. 1, — e sommando, si trae, grazie alle (1):

$$A(\xi x^{11}) + B(\xi x^{12}) + C(\xi x^{22}) = 0 .$$

Quest'equazione, presa insieme colle (2), ammette due possibilità: 1°) è nullo il determinante dei coefficienti delle tre quantità (ξx^{11}), (ξx^{12}), (ξx^{22}), ossia si ha

$$(7) \qquad C du^2 - B du\, dv + A dv^2 = 0 ,$$

cioè la direzione $du : dv$ è quella di una delle *caratteristiche* della superficie (« *Sup.* » nn. 13, 14, 15). Per ognuna di queste linee avviene che i piani tangenti nei suoi punti a F formano una V_3 sviluppabile (ordinaria); perciò (n. 3) le caratteristiche rientrano fra le linee principali. 2°) si ha:

$$(8) \qquad (\xi x^{11}) = 0 \ , \ (\xi x^{12}) = 0 \ , \ (\xi x^{22}) = 0 ,$$

ossia ξ è l'iperpiano (*iperosculatore*) che sega F in una curva con punto *triplo* in x (« *Sup.* » n. 19) [1]. Allora le (2) son verificate senz'altro, e resta la (3), che dà precisamente la terna delle tangenti a quella curva nel punto triplo (cfr. « *Sup.* » n. 21). E già al n. 22 di « *Sup.* », per questa classe di superficie, avevo chiamato quella terna di rette la *terna delle tangenti principali*.

Concludiamo dunque: *la quintupla delle tangenti principali di una superficie, non sviluppabile, di* S_5, *si scompone, nel caso che la superficie verifichi un'equazione di Laplace, nella detta terna di rette e nella coppia delle tangenti alle caratteristiche (Hessiana di quella terna)* [2].

[1] Dalle sei equazioni (1) e (8) risulta che quest'iperpiano ξ è ben determinato: perchè, avendo escluso che F sia sviluppabile, è unica (« *Sup.* » n. 12) l'equazione (6) verificata dalle x_i, e quindi la matrice quadrata d'ordine 6 delle x_i e delle loro derivate prime e seconde ha la caratteristica 5.

[2] Com'è già avvertito in nota al n. 23 di « *Sup.* », se l'equazione (6) è *parabolica*, ad es° se la superficie è rigata, le linee principali si riducono al sistema *semplice* delle caratteristiche (per le rigate, il sistema delle generatrici rettilinee) ed un altro sistema semplice di linee. E. Bompiani (« *Alcune proprietà projettivo-differenziali dei sistemi di rette negl'iperspazi* », Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 37, 1914, pag. 305: v. a pag. 314) ha incontrato, fra quelle linee che egli chiama *quasi-asintotiche* per le rigate, questo secondo sistema di linee principali (nella sua notazione sono le $\gamma_{2,2}$), rilevando come la loro determinazione dipenda da un'equazione di Riccati: sicchè vale un teorema analogo a quello noto di P. Serret relativo alle rigate ordinarie.